

T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Felsefe Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Puslu Mantık ve Felsefi Arka Planı

Yücel Yüksel

2502010084

Tez Danışmanı Prof. Dr. Şafak Ural

İstanbul 2006

ÖZ

Puslu mantık 20. yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkmış yeni sayılabilecek bir teoridir. Bu tez çalışmasının amacı, teknik alanlardaki bir takım başarılı uygulamaları dışında pek tanınmayan bu teoriyi felsefi arka planı ile birlikte ortaya koymak ve böylece onun daha iyi anlaşılmasına ve tanınmasına katkıda bulunmaktır. Bu çalışmada öncelikle puslu mantığın bir tarihçesi verilmiş ve puslu mantık teorisinin ortaya çıkışına sebep olan felsefi tartışmalar ele alınmıştır. Daha sonra bu teorinin yapıtaşı olan “puslu küme”, ilişkili olduğu bazı önemli kavramlarla birlikte ve teknik açıdan incelenmiş; son olarak puslu kümeler cebiri ile bu teorinin temel işlemleri gösterilmeye çalışılmıştır.

ABSTRACT

Having emerged in the second half of the 20th century fuzzy logic may be considered as a rather novel theory. The aim of this study is to demonstrate the philosophical background of the mentioned theory which except its various successful applications in technological areas is not very well-known, thus to contribute to its becoming more known and being better comprehended. In this study, primarily, the history of fuzzy logic has been outlined and the philosophical disputes which led to the theory of fuzzy logic have been dealt with. Then, the concept of “fuzzy set” which is a fundamental element of the theory and some main concepts related to it have been examined in the operational context. Finally, the algebra of fuzzy sets and the principal calculates of the theory have been attempted to be exposed.

ÖNSÖZ

Puslu mantık, aksiyomları açısından geleneksel mantık sistemlerinden çok farklı kabullere dayanır. Bu fark, onun çoğu bilim adamı ve mantıkçı tarafından derin bir şüphe ile karşılanmasına, bu şüphe ise metodunun geçerliliği ve problem çözümü konusundaki yetkinliğinin pek çok eleştiriye maruz kalmasına sebep olmuştur. Bu eleştirilerin önemli bir kısmı, geleneksel mantık sistemlerinin iki değerlilik prensibinin, puslu mantık açısından yetersiz olması ile ilgilidir. Bu yetersizlik sadece geleneksel mantık sistemlerini değil iki değerlilik prensibini temel alan bilimsel düşüncenin şekillendirdiği modern bilimleri de ilgilendirmektedir. Bu sebeple de puslu mantığa yöneltilen eleştiriler çok sert olmuştur.

Öyle görünmektedir ki puslu mantığın düşünce dünyasında uzun bir süre çok iyi tanınmamasının başlıca sebebi, baskın bilimsel anlayışın puslu mantık hakkındaki gerçeği yansıtmayan eleştirilerinin bile çok ciddiye alınması, bu sebeple puslu mantığa hak ettiği ilginin gösterilmemesidir.

90'lardan itibaren bu teorinin özellikle teknoloji ve mühendislik alanındaki büyük başarıları ona olan ilginin bir anda artmasına, 80'lere kadar birkaç önemli çalışmadan oluşan puslu mantık literatürünün büyük bir zenginliğe ulaşmasına sebep olmuştur. Ancak bu literatürün tamamına yakınının puslu mantığın çeşitli fakat çok spesifik ve teknik alanlardaki uygulamalarına yönelik olduğu, konunun felsefi ve mantıksal kökenini sorgulayan çok az sayıda çalışma bulunduğu göz önüne alınırsa, bu zenginlikten felsefeci ve sosyal bilimcilerin yeterince istifade edemeyecekleri açıktır.

Bu tezin hazırlanmasındaki temel amaç, puslu mantık teorisini, teknik özelliklerini incelemenin dışında, felsefi arka planının önemini ortaya çıkartacak bir şekilde ele almak, özellikle felsefeciler ve sosyal bilimcilerin, bu teori hakkında daha duru ve sağlıklı bilgiler edinmesini sağlayacak bir çalışma ortaya koyabilmek, böylelikle yukarıda ifade ettiğimiz sıkıntıların belirli bir ölçüde giderilebilmesine katkıda bulunmaktır.

Bu tez çalışmamdaki değerli katkılarından ötürü tezimi yöneten hocam sayın Prof. Dr. Şafak URAL'a şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
Öz	iii
Önsöz	iv
Tablolar, Şekiller ve Grafikler	viii
Kısaltmalar Listesi	x
Giriş	1
1. Puslu Mantığın Tarihçesi ve Bazı Yakın Kavramlarla İlişkisi	2
1.1. “Küme” Kavramının Tarihçesi ve Puslu Küme	2
1.1.1. Klasik Kümeler ve Karakteristik Fonksiyonlar	3
1.1.2. Çok-Değerli Mantık Çalışmaları	5
1.1.3. Puslu Kümeler ve Puslu Mantık Teorisi	7
1.1.4. Puslu Mantık Uygulamaları	8
1.2. Müphemlik Problemi	10
1.2.1. Belirsizlik	14
1.2.2. Kesin Olmayış	19
1.2.3. Şüphelilik	20
1.2.4. Derecelilik, İmkan, Olasılık	22
2. Puslu Küme, Sözel Değişken ve Sözel Eşik Kavramları, Puslu Kümeler Arasındaki Temel İlişki Biçimleri	29
2.1. Puslu Kümeler	29
2.1.1. Kümelere İlişkin Semboller	32
2.1.2. Küme Gösterim Yöntemleri	32
2.1.2.1. Liste Yöntemi	32

2.1.2.2. Kural Yöntemi	33
2.1.2.3. Üyelik Fonksiyonu Yöntemi	33
2.2. Puslu Kümelere İlişkin Bazı Tanım ve Özellikler	35
2.2.1. Öz Puslu Küme	35
2.2.2. Boş Küme	35
2.2.3. Normal ve Normal-altı Küme	36
2.2.4. Dışbükeylik	36
2.2.5. Puslu Bir Kümenin Yüksekliği	38
2.2.6. Puslu Kümelerde Üyelik Fonksiyonunun Kısımları	39
2.2.6.1. Puslu Bir Kümenin Dayanağı	39
2.2.6.2. Puslu Bir Kümenin Özü	39
2.2.6.3. Puslu Bir Kümenin Sınırları	39
2.3. Sözel Değişkenler ve Sözel Eşikler	41
2.3.1. Daraltma	43
2.3.2. Genişletme	43
2.3.3. Yoğunlaştırma	44
2.4. Puslu Kümeler Arasındaki Temel İlişki Biçimleri	46
2.4.1. Eşitlik, Altküme ve Üst küme	46
2.4.2. Tümlen	48
2.4.3. Birleşim ve Kesişim	49
3. Puslu Kümeler Cebiri	53
3.1. t-bir.normu, t-normu ve Tümlenme İşlemleri	53
3.2. Klasik ve Puslu Bağıntılar	68
3.2.1. Klasik Kartezyen Çarpım Kümesi	68
3.2.2. Klasik Bağıntıların Gösterimi	69
3.2.3. Puslu Bağıntıların Gösterimi	71
3.2.4. Puslu Bağıntılar Arasındaki İlişkiler	72

3.2.5. Puslu Bağıntılara İlişkin Bazı Kümelerin Belirlenmesi	73
3.2.5.1. Puslu Kartezyen Çarpım Kümesi	73
3.2.5.2. Silindirik Genişletim ve Projeksiyon	74
3.2.5.3. Standart Bileşim İşlemi	75
3.2.6. Tek Kümeye İlişkin Bağıntılar ve Özellikleri	76
3.3 “ ∞ -Kesikleri” ve “Güçlü ∞ -Kesikleri”	78
Sonuç	82
Kaynakça	84
Özgeçmiş	87

Şekiller, Grafikler ve Tablolar	Sayfa
Şekil 1. Susuz Yolcu İçin Bir Çift Şişe	26
Şekil 2. Susuz Yolcu İçin (Ne Olduğu Belli) Bir Çift Şişe	26
Grafik 1. Klasik Bir Kümenin Üyelik Fonksiyonu	34
Grafik 2. Üçgen Biçimli Üyelik Fonksiyonu	34
Grafik 3. Yamuk Biçimli Üyelik Fonksiyonu	34
Grafik 4. Çan Eğrisi Biçimli Üyelik Fonksiyonu	34
Grafik 5. Normal Bir Puslu Küme	36
Grafik 6. Normal-altı Bir Puslu Küme	36
Grafik 7. Dışbükey Bir Puslu Küme	37
Grafik 8. Dışbükey Olmayan Bir Puslu Küme	37
Grafik 9. Üyelik Fonksiyonu Kısımları	40
Grafik 10. Üyelik Fonksiyonunun Daraltılması	43
Grafik 11. Üyelik Fonksiyonunun Genişletilmesi	44
Grafik 12. Üyelik Fonksiyonunun Yoğunlaştırılması	45
Grafik 13. İki Puslu Küme Arasındaki Altküme İlişkisi	47
Grafik 14. Puslu Bir Küme ve Tümlenyeni	49
Grafik 15. İki Puslu Kümenin Birleşimi	50
Grafik 16. İki Puslu Kümenin Kesişimi	51
Grafik 17. Ayrık Puslu Kümeler	52
Grafik 18. Klasik Bir Bağıntının Sagittal Diyagramıyla Gösterimi	70
Grafik 19. Puslu Bir Bağıntının Sagittal Diyagramıyla Gösterimi	72

Şekiller, Grafikler ve Tablolar	Sayfa
Grafik 20. Tek Kümeye İlişkin Bağntı Özellikleri	78
Grafik 21. Puslu Bir Kümede ∞ -Kesiklerinin Belirlediği Klasik Kümeler	79
Grafik 22. Bir Puslu Küme Üzerindeki ∞ -Kesikleri	80
Tablo 1. Parametrize Edilmiş Bazı Birleşim ve Kesişim Aileleri	67

Kısaltmalar Listesi

A.e.	Aynı eser/yer
a.g.e.	Adı geçen eser
Bkz.:	Bakınız
bs.	Baskı
Çev.	Çeviren
Ed.	Editör/yayına hazırlayan
s.	Sayfa/sayfalar
v.d.	“ve diğerleri”

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, günümüzde oldukça kapsamlı bir hal alan puslu mantık teorisi, en temel unsuru durumundaki “puslu kümeler” çerçevesinde değerlendirilecektir. Bu teorinin “imkan”, “olasılık” vb. kavramları inceleyen alt teorilerine gerektiği durumlar haricinde değinilmeyecek, “puslu sayı” kavramı ise matematiğin konusu olması sebebiyle tümüyle inceleme dışında tutulacaktır.

Bu çalışmada birincil kaynak olarak, puslu mantığı ortaya koyan ve geliştirilmesinde önemli katkıları bulunan L.A. Zadeh’in çalışmalarından yararlanılmış, belirli konularda daha ayrıntılı bilgi edinebilmek için diğer puslu mantık uzmanlarının çalışmalarına da sıkça başvurulmuştur.

Tezin birinci bölümünde, öncelikle bir tarihçe ile puslu mantık teorisinin ortaya çıkış koşulları ve gelişim süreci aktarılmaya çalışılacaktır. Daha sonra puslu mantığın ortaya çıkmasına sebep olan bilimsel ve felsefî tartışmalar ele alınacak, bilimsel düşüncenin temel ilkelerinden biri olan “katiyet” kavramına karşı geliştirilen eleştiriler çerçevesinde farklı türden müphemlikler üzerinde durulacaktır. “Belirsizlik”, “kesin olmayış” ve “şüphelilik” başlıkları altında incelenecek olan bu birbirinden farklı müphem durumların açık bir şekilde tanımlanmasıyla puslu mantığın inceleme alanı orta konmuş, beraberinde imkanı ele alan mantık sistemleri ile olasılık teorisinden farkı da belirlenmiş olacaktır.

Tezin ikinci bölümünde puslu kümenin ayrıntılı bir tanımı verilecek, bu kümelerin özellikleri ve birbirleriyle kurdukları temel ilişki biçimleri tanımlanacak ve grafiklerle gösterilmeye çalışılacaktır. Yine bu bölümde, puslu mantıkta, gündelik dilin belirsiz ifadelerini tanımlamak için kullanılan ve birer puslu küme olarak değerlendirilen “sözel değişken” ve “sözel eşik” kavramları ile bunlara ait temel işlemler ele alınacaktır.

Tezin, puslu kümeler cebirinin anlatılacağı üçüncü bölümünde ise bir önceki bölümde genel hatlarıyla ele aldığımız puslu kümelerin temel ilişki biçimlerinin aksiyomatığı ortaya konulmaya çalışılacak, son olarak “puslu bağıntı” kavramı, bu bağıntılara ilişkin işlemler ve puslu kümelerin klasik kümelere çevrim işlemleri incelenecektir.

1.Puslu Mantığın Tarihçesi ve Bazı Yakın Kavramlarla İlişkisi

1.1. “Küme” Kavramının Tarihçesi ve Puslu Küme

Puslu mantık, belirsiz veya kesin olmayan tanımların ifadesi için kullanılan **“puslu kümeler”** üzerine inşa edilmiş bir teoridir. Bu nedenle puslu mantık teorisinin ortaya çıkışı ve gelişimi, puslu küme kavramının tarihçesinden bağımsız olarak ele alınamaz. Beraberinde, çok-değerli mantık çalışmalarının puslu mantık teorisinin evrimindeki büyük katkıları, böyle bir tarihçede onlara da değinilmesini gerekli kılmaktadır.

“Küme” kavramı çerçevesinde düşünülebilecek klasik çalışmaların kökleri Antikçağ’a kadar uzanmaktadır. Mantığa ilişkin ilk eser olan ve altı bölümden oluşan **“Organon”** adlı çalışmasında Aristoteles (M.Ö.384-322), mantığı en genel şekliyle **“terimler”** ve **“kıyaslar”** olarak adlandırabileceğimiz iki ana kısımda ele almış ve incelemiştir. Bu çalışmada, antik dönemde geliştirilmiş olan **“klasik sınıf işlemi”** (classical calculus of classes), Aristoteles tarafından bir **“kıyas teorisi”** (theory of syllogism) olarak ortaya konmuştur¹. Klasik sınıf işlemi, her terim için, o terimin kaplamının (extension) oluşturduğu bir sınıf öngörmekte, kıyas teorisiyle önermelerin özne ve yüklemelerinin belirttiği sınıflar arasındaki ilişkiler değerlendirilmektedir². Buna göre sınıflara dolayısıyla kümelere ilişkin ilk sistemli çalışmanın Aristoteles’in kıyas teorisi olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır.

Antikçağ’da mantığın diğer önemli bir çalışma alanı, Aristoteles’in de kısmen ele aldığı ancak özellikle Stoa-Megara okulunun katkılarıyla sistemli bir hale gelmiş olan modal mantıktır. Modal mantıkta, Aristoteles’in iki değerli mantığı ile doğruluk değerleri tespit edilemeyen, özellikle “yarın yağmur yağacak” gibi geleceğe ilişkin önermeler üzerine odaklanılmış, bunların doğrulukları imkan kavramıyla birlikte

¹ Walenty Ostasiewicz, “Pioneers of Fuzziness”, (Çevrimiçi) http://www.univ-savoie.fr/Portail/Groupe/LISTIC/busefal/Papers/46.zip/46_01.pdf, 10 Haziran 2005, s. 1.

² Bkz.: Mary Tiles, **The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise**, USA, Courier Dover Publications, 2004, s. 34.

değerlendirilmiştir. Modal mantık, Aristoteles'in kıyas teorisi ile birlikte tüm Ortaçağ boyunca mantık çalışmalarının merkezi olmasının yanı sıra 20. yy'ın çok-değerli mantık çalışmalarını önceleyişi nedeniyle de büyük bir öneme sahiptir.

1.1.1. Klasik Kümeler ve Karakteristik Fonksiyonlar

“**Klasik küme**” kavramının belki de ilk tanımını, filozofluğunun yanı sıra önemli bir matematikçi-mantıkçı olan Wilhelm Gottfried Leibniz (1640-1716) vermiştir. Leibniz bir kümeyi bir arada düşünülen ve bir bütün olarak değerlendirilen herhangi sayıdaki şeyler olarak tanımlamıştır³. Leibniz sonrası, mantık ve matematikteki küme kavramına ilişkin en önemli çalışma George Boole'a (1815-1864) aittir. Empirik dünyanın, görünür (visible) empirik özellikler ve onları bir arada tutan görünür empirik bağıntılarla birlikte nesnelerin sonlu bir toplamından oluştuğu iddiasından hareket eden Boole, birisi tüm nesneler sınıfı, diğeri ise tüm özellikler sınıfı olmak üzere iki sınıf varsaymıştır. Bu varsayım üzerine Boole, nesneler ile özellikler arasındaki ilişkileri belirleyen ve ilki günümüzde Boole cebiri olarak adlandırılan sistemin esasları olan iki kanun ortaya koymuştur⁴.

Küme kavramı bugün anlaşıldığı şekliyle ilk kez Georg Cantor (1845-1918) tarafından ele alınmıştır. Bir matematikçi olan Cantor, başlı başına bir inceleme konusu olması nedeniyle burada ele almayacağımız bir takım matematiksel problemlerin çözümü amacıyla bir küme teorisi geliştirmiştir⁵. Altkümelerin kesişim, birleşim ve tümlenme işlemleriyle donatılmış özel bir cebirsel yapı olan Boole cebiri üzerine temellenmiş⁶ bu teori, günümüzde naif (naive) bir sınıflar teorisi (ya da naif küme teorisi) olarak adlandırılmaktadır⁷. İçerdiği tutarsızlık nedeniyle büyük eleştiriler almış ancak kullanışlılığı nedeniyle bütünüyle terk edilememiş olan bu teori bazı matematikçiler tarafından tutarlı bir hale getirilmeye çalışılmıştır⁸. Bu çalışmalar içerisinde en önemlileri E. Zermelo (1871-1953), B. Russell (1872-1970)

³ Didier Dubois, Walenty Ostasiewicz, Henri Prade, “Part I Fuzzy Sets: History and Basic Notions”, **Fundamentals of Fuzzy Sets**, Ed. Didier Dubois, Henri Prade, USA, Kluwer Academic Publishers, 2000, s. 36.

⁴ **A.e.**, s. 38.

⁵ **Bkz.: A.e.**, s. 37.

⁶ **A.e.**, s. 55-56.

⁷ Tiles, **a.g.e.**, s. 32.

⁸ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 37.

ve S. Lesniewski (1916-1992) tarafından yapılanlardır. Bunlardan Zermelo'nun sistemi daha sonra A. Fraenkel (1891-1965) tarafından geliştirilmiş, böylelikle günümüzde Zermelo-Fraenkel (kısaca ZF) küme teorisi olarak bilinen ve puslu küme kavramının da içerisinde geliştirildiği bir küme sistemi ortaya konmuştur⁹.

Genel olarak matematiği temellendirme iddiasını taşıyan ve zaman içerisinde büyük bir taraftar kitlesine sahip olan küme teorisi, matematikselliğin eş değeri olarak algılanmaya başlanmasıyla birlikte özsel bir parçası durumundaki sınıflar işlemi ile kesinliğin ifadesinin en önemli aracı haline dönüşmüştür. Bu teorinin, bilimsel paradigmanın kesinliği ele alış tarzında yarattığı bu farklılık puslu kümelerin ortaya çıkış sürecinde çok önemli bir dönüm noktasıdır. Çünkü bu dönemde pek çok araştırmacı kesinliğin ifadesi için kullanılan sınıflar işlemini kesin olmayan kavramlara ilişkin bir işlemin inşası için de uygun bir zemin olarak değerlendirmeye başlamıştır¹⁰. Bu yöndeki çalışmalara, 1936 yılında Ch. de la Vallée Poussin tarafından ortaya konulan, formal olarak sözünü ettiğimiz sınıflar işlemine eşdeğer bir Boole cebiri sistemi olan “**karakteristik fonksiyonlar**” (characteristical functions)¹¹ temel oluşturmuştur. Azeri bilim adamı Lotfi Asker Zadeh'in (Lütfi Askerzade) puslu küme kavramını geliştirdiği 1965 yılına kadar uzanan süreç içerisinde bazı mantıkçı ve matematikçilerin, kesin olmayan kavramları ifade edebilmek için, bu fonksiyonların alanının, $\{0, 1\}$ şeklinde gösterilen iki-elemanlı küme yerine $[0, 1]$ birim aralığı şeklinde genellenmesine yönelik çalışmaları puslu kümelerin gösteriminde kullanılan “**üyelik fonksiyonları**”nı (membership functions) öncelemiştir. Bu genelleme çalışmaları üyelik fonksiyonlarının gelişimi açısından son derece önemlidir ancak bu nosyonun atası olarak Max Black'ın (1909-1988) 1937 yılında belirsiz sembolleri tanımlamak amacıyla ortaya koymuş olduğu “**tutarlılık profilleri**” (consistency profiles) gösterilmektedir¹². 1940 yılında, yukarıda açıkladığımız şekliyle ilk genellemeyi yaparak karakteristik fonksiyon yerine sürekli (continuous) karakteristik fonksiyon kavramını geliştiren H. Weyl (1885-1955), üyelik fonksiyonlarının gelişimine öncülük eden diğer bir mantıkçı

⁹ A.e.

¹⁰ Bkz.: Ostasiewicz, a.g.e., s. 1.

¹¹ A.e.

¹² Dubois, Ostasiewicz, Prade, a.g.e., s. 24.

olmuştur¹³. 1951’de, A. Kaplan (1918-1993) ve H. F. Schott’ın aynı türden bir genelleme yoluyla belirsiz yüklemelerin genellenmiş karakteristik fonksiyonları için önerdikleri hesap (calculi) temel puslu küme ilişkilerini de ortaya koymuştur¹⁴. “Puslu küme” tabirini ilk kez (ancak fransızca karşılığı olan “ensemble flou” olarak) kullanan kişi matematikçi Karl Menger’dir (1902-1985)¹⁵.

1.1.2. Çok-Değerli Mantık Çalışmaları

Tarihçesi çoğunlukla Gottlob Frege’nin (1848-1925) “**Begriffsschrift**” adlı eseriyle başlatılan modern (sembolik) mantığın gelişimi ile matematikteki küme teorisine ilişkin gelişme ve tartışmalar hemen hemen aynı dönem içerisinde cereyan etmiştir. Mantık alanında esaslı yeniliklerin ortaya çıktığı bu dönemde mantık ve matematik üzerine yapılan çalışmalarının özellikle kümeler teorisi çerçevesinde ciddi bir ilişki içerisinde olduğu açıktır. Genel olarak, klasik mantığın klasik kümelerle ilişkisi ile sözü edilen dönemde ortaya çıkmış olan çok-değerli mantık sistemleriyle puslu kümelerin ilişkisi bir paralellik göstermektedir.¹⁶ Bu ilişkiler nedeniyle kümeler konusunda yapılan çalışmalar ile çok-değerli mantık çalışmaları arasında karşılıklı bir etkileşimin olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır.

Sonraki bölümde ayrıntılı olarak inceleyeceğimiz müphemlik üzerine tartışmaların sonuçlarından biri olan Jan Lukasiewicz’in (1878-1956) “**üç değerli mantık**” sistemi, puslu mantık teorisi açısından o güne kadarki en önemli gelişme durumundadır. İki değerli mantığa alternatif geliştirmeye yönelik çalışmaların ilk somut örneği olan bu sistemde Aristoteles mantığının kabullerinden farklı olarak “doğru” ve “yanlış” doğruluk değerleri dışında “imkan”ı ifade eden bir ara doğruluk değeri varsayılmakta, önerilen yeni notasyonun bir parçası olarak doğrunun ifadesi için “1”, yanlışın ifadesi için “0”, söz konusu müphemliğin ifadesi için ise “ $\frac{1}{2}$ ” değeri kullanılmaktadır¹⁷. Lukasiewicz’in ilk kez 7 Mart 1918’de Varşova Üniversitesi’nde yaptığı “veda dersi”nde değindiği bu sistemi kapsamlıca tanıttığı eser 1920 yılında yayınlanmış; sistemin aksiyomatik yapısı daha sonra Wajsberg

¹³ A.e., Ostasiewicz, a.g.e., s. 1.

¹⁴ A.e., A.e.

¹⁵ Dubois, Ostasiewicz, Prade, a.g.e., s. 24.

¹⁶ A.e., s. 31.

¹⁷ Bkz.: George Bojadziev, Maria Bojadziev, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications**, Singapore, World Scientific, 1996, s.170.

(1902-1942?) tarafından inşa edilmiştir¹⁸. Hemen hemen aynı tarihlerde ancak Lukasiewicz'in sisteminden tamamıyla bağımsız ve farklı öncüllerden hareketle geliştirilen bir başka çok-değerli mantık sistemi ise Emil Post'a (1897-1954) aittir¹⁹. Bu iki mantıkçıdan sonra da çok-değerli mantık üzerine çalışmalar devam etmiş örnek olarak Rescher, Hajek ve Gottwald gibi bazı mantıkçılar yeni çok değerli-mantık sistemleri geliştirmişlerdir²⁰. Modaliteyi yeni bir tarzda işleyen çok-değerli mantık teorileri ile puslu mantık teorisi arasında, daha önce değinmiş olduğumuz gibi, inceledikleri müphemlikler açısından her ne kadar belirgin bir farklılık varsa da, kimi mantıkçılar puslu mantık teorisini çok genel bir anlamda da olsa bir çok-değerli mantık sistemi olarak değerlendirmişlerdir.²¹ Böyle bir değerlendirmenin ardındaki en önemli sebep puslu küme kavramı ile çok-değerli mantık sistemlerinin doğruluğu ele alış biçimleri arasındaki ilişki ve buna ilave olarak çok-değerli mantık sistemlerinin puslu mantık teorisinin cebirsel altyapısının oluşturulmasındaki çok önemli katkılarıdır²². Zadeh, puslu mantık teorisinin bir tür çok-değerli mantık olarak değerlendirilişine tümüyle karşı çıkmıyorsa da, geleneksel mantıksal sistem içerisinde değerlendirdiği çok-değerli mantık teorilerine göre puslu mantık teorisinin daha yetkin bir sistem olduğu konusunda ısrar etmektedir. Ona göre puslu mantık, özü ve detayları itibariyle geleneksel mantıksal sistemden büyük ölçüde farklıdır ve bilginin temsili ve çıkarım için çok daha genel bir çatı sağlar. Pek çok konuyu pusluluk açısından değerlendirme yeteneğine sahip oluşunun bir sonucu olarak geleneksel mantıksal sistemlere göre çok daha büyük bir ifade gücüne sahip durumdadır²³.

¹⁸ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 32.

¹⁹ **A.e., Bkz:** Bojadziev, Bojadziev, **a.g.e.**, s. 175.

²⁰ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 32.

²¹ Mircea Regriş, Eugene Roventa, **Classical and Fuzzy Concepts in Mathematical logic and Applications**, USA, CRC Press, 1998, s. 131.

²² Çok-değerli mantık sistemleri ile puslu mantık arasındaki ilişkiler konusunda daha detaylı bilgi için **Bkz.:** Didier Dubois, Henri Prade, Erich P. Klement, "Introduction: Bridging The Gap Between Multiple-Valued Logics, Fuzzy Logic, Uncertain Reasoning and Reasoning About Knowledge", **Fuzzy Sets, Logics and Reasoning About Knowledge**, Ed. Didier Dubois, Henri Prade, Erich Peter Klement, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1999, s. 1-7.

²³ Lotfi A. Zadeh, "The Birth and Evolution of Fuzzy Logic", **Int. J. General Systems**, Gordon and Breach Science Publishers S.A., UK, vol.17, 1990, s. 101-102.

1.1.3. Puslu Kümeler ve Puslu Mantık Teorisi

1960'ların başında, Berkley California Üniversitesi'nde sistem teorileri üzerine çalışmaktayken, geleneksel sistem analiz tekniklerinin karmaşık gerçek-dünya problemleri için çok kesin olduğunu fark eden Lotfi A. Zadeh²⁴, H. Weyl, A. Kaplan ve H.F. Scott'a benzer bir biçimde karakteristik fonksiyonun genişletilmesi konusu üzerinde durmuş²⁵ ve çalışmaları neticesinde “puslu küme” kavramını geliştirmiştir. Zadeh, 1965 yılında yayınlanan “**Fuzzy Sets**” (“Puslu Kümeler”) adlı özgün çalışması ile bu kavramı ve özelliklerini ortaya koymuş; böylelikle puslu mantık teorisinin temellerini atmıştır. 1965 yılından sonraki on yıl içerisinde, bu teorinin ana kavramları ile 1975 yılında E.H. Mamdani ve S. Assilian'ın, bir buhar makinesinin kontrolü için kullandıkları puslu kontrolün temelleri yine Zadeh tarafından geliştirmiştir²⁶. Zadeh'in 1968'deki “Fuzzy Algorithms” ile “Probability Measures of Fuzzy Events”, 1971'deki “Similarity Measures and Fuzzy Orderings”, 1973'deki “Quantitative Fuzzy Semantics” ile “Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes”²⁷ ve 1975'deki “The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning I, II, III” isimli çalışmaları gelecekteki gelişmelere öncülük etmeleri nedeniyle çok önemlidir²⁸. Bu dönemde, Zadeh'in çalışmalarının dışında, puslu mantık teorisine ilgili birkaç önemli çalışma daha yapılmıştır. Bunlar sırasıyla Goguen'in 1967'deki “L-Fuzzy Sets” ile 1968-1969'daki puslu mantık teorisine çok-değerli mantık çalışmaları arasındaki bağlantıları konu alan “The Logic of Inexact Concepts” isimli çalışmaları, Ruspini'nin 1969'daki puslu kümelenme üzerine yaptığı “A New Approach to Clustering” isimli çalışması ve E.H. Mamdani'nin, esasları 1973'te Zadeh tarafından belirlenmiş²⁹ puslu kontrol kavramını ilk kez ortaya koyan ve puslu

²⁴ John Yen, “Fuzzy Logic-A Mordern Perspective”, (Çevrimiçi) <http://www.cs.plu.edu/courses/csce330/arts/fuzzy1.pdf>, 11 Haziran 2005, p. 2.

²⁵ Ostasiewicz, **a.g.e.**, s. 1-2.

²⁶ Illuminada Baturone, v.d., **Microelectronic Design of Fuzzy Logic-Based Systems**, USA, CRC Press, 2000, s. 3.

²⁷ Zadeh, “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, s. 102.

²⁸ Vilem Novak, “Fuzzy Logic”, **Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems**, Ed. Dov M. Gabby, Philippe Smets, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1998, s. 76.

²⁹ Kastedilen, Zadeh'in 1973 yılındaki yukarıda söz ettiğimiz iki çalışmasından biri olan “Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes” isimli çalışmasıdır.

mantık teknolojisinin başlangıcı olarak gösterilen 1974'deki "Applications of Fuzzy Algorithms for Simple Dynamic Plant" isimli çalışmasıdır³⁰.

Puslu mantık teorisinin ilk on yılından sonra bu teori çerçevesinde farklı alanlarla ilgili incelemeler de yapılmaya başlanmıştır. Bunlar içinde en önemlisi, Zadeh'in 1978 yılındaki "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility" isimli çalışmasıdır. Bu çalışmayla ortaya konan imkan teorisi, D. Dubois ve H. Prade'nin 1988'deki "An Introduction to Possibilistic and Fuzzy Logics" isimli çalışmayla kapsamlı bir alan haline getirdikleri imkansal mantığa (possibilistic logic) zemin oluşturmuştur³¹. 80'ler puslu mantık teorisinin cebirsel gelişimini sağlayan çalışmaların yapıldığı, çeşitli genellemelerin kanıtlandığı, başarılı girişimler kadar başarısız girişimlerin de gözlendiği ve puslu mantık teknolojisinin üretilmeye başlandığı yıllardır³².

1.1.4. Puslu Mantık Uygulamaları

Puslu mantık teorisinin gelişimine paralel olarak bu teoriyi temel alan pek çok uygulama hayata geçirilmeye başlanmıştır. Hatta bu teorinin kabul görmesinde uygulama alanlarındaki başarılar önemli bir rol oynamıştır. Özellikle 90'lardan itibaren başta bilgisayar programlama ve yapay zeka çalışmaları olmak üzere bankacılık, sağlık, eğitim vb. alanlara; çok nadir de olsa sosyoloji, psikoloji gibi sosyal bilimlere ilişkin bir takım çalışmalarda bu teorinin kullanılmaya başlandığı görülmektedir. Ancak puslu mantığın en yaygın ve tanınmış uygulamaları, puslu mantık teknolojisi olarak adlandırılan ve özellikle puslu temelli kontrol sistemlerinin üretilmesi konusunda yapılan endüstriyel çalışmalardır.

Puslu mantığa ilişkin temel teorik fikirler ABD'den çıkmışsa da bu teoriyi çok hızlı bir şekilde benimseyen ve puslu mantık teknolojisinin geliştirilmesi konusunda büyük adımlar atan ülkeler Japonya, Çin Halk Cumhuriyeti gibi Uzakdoğu ülkeleri olmuştur. Özellikle Japonya günümüzde bu teknolojinin merkezi durumundadır. Bazı yazarlara göre bunun temel sebebi Batı bilimi ve mühendisliğinde hakim olan iki değerli Aristoteles mantığı ile Uzakdoğu

³⁰ Novak, a.g.e.

³¹ A.e.

³² A.e., s. 76-77.

toplumlarında hakim olan ve ilkeleri iki değerlilikle uzlaşmayan Zen felsefesi arasındaki belirgin farklılıktır³³.

Puslu mantık teknolojisinin ilk örneği olarak H.E. Mamdani ve S. Assilian'ın 1974 yılında bir buhar makinesinin kontrolü üzerine yaptıkları çalışma gösterilmektedir³⁴. Bu teknolojinin ilk endüstriyel uygulaması ise 1976'da Danimarka'da Blue Circle Cement ve SIRA tarafından geliştirilen ve 1982 yılında uygulamaya konulan bir çimento ocağı denetleyicisidir³⁵. Japonya'da 70'lerin sonlarında sadece küçük araştırma grupları tarafından ele alınmakta olan puslu mantık uygulamaları, hemen her yerde olduğu gibi önceleri bir takım tepkiler almıştır. Buna rağmen çok kısa bir sürede büyük bir kesim tarafından tanınır ve benimsenir hale gelen bu uygulamalar, Batı'daki sözünü ettiğimiz bu ilk uygulamaları gölgede bırakacak büyük çalışmalara zemin oluşturmuştur. Japonya'da puslu teknolojinin ilk örnekleri 1985 yılında Yagishita tarafından geliştirilen bir atık su arıtma sistemi ile Sugeno'nun geliştirdiği puslu robottur³⁶. Yine aynı yıl Bell Telefon Laboratuvarları'nda Togai ve Watanabe tarafından üretilen ilk puslu mantık çipi puslu bir bilgisayarın geliştirilmesi konusunda ilk önemli adım durumundadır³⁷. Puslu mantığın en ünlü uygulamalarından birisi 1987 yılında Yasunobu ve onun Hitachi'deki arkadaşları tarafından gerçekleştirilen Sendai şehri metrosunun otomatik kontrol sistemidir³⁸.

Puslu mantığın Japonya'daki etkinliği 1989'da LIFE'in ("The Laboratory of International Fuzzy Engineering") ve 1990'da FLSI'in ("Fuzzy Logic Systems Research Institute") kurulmasıyla daha da artmıştır. Günümüzde büyük Japon firmalarının hemen hepsi, ev gereçleri, video kameralar, otomotiv ve uzay endüstrisi, robotik vb. pek çok alanda puslu mantık teknolojisiyle üretim yapmaktadırlar. Japonya'daki "puslu patlama" dünya genelinde puslu mantık teknolojisine olan ilgiyi arttırmış, 1990'dan itibaren, aralarında NASA'nın da bulunduğu ABD'nin ve

³³ Baturone, v.d., **a.g.e.**, s. 3.

³⁴ Zadeh, "The Birth and Evolution of Fuzzy Logic", s. 103.

³⁵ Yen, **a.g.e.**, s. 3.

³⁶ Baturone, v.d., **a.g.e.**, s. 4.

³⁷ Zadeh, "The Birth and Evolution of Fuzzy Logic", s. 100.

³⁸ Yen, **a.g.e.**, s. 3.

Avrupa'nın çok büyük kurum ve şirketleri de bu teknolojiyi kullanmaya başlamışlardır³⁹.

1.2. Müphemlik Problemi

Puslu mantık, kavram olarak, yukarıda işaret ettiğimiz gibi bazı yönlerden Antikçağ'a kadar geri götürülebilse de onun bütünüyle yeni bir kavram ve çok farklı bir aksiyomatik üzerine kurulmuş olduğu göz ardı edilmemelidir. Bununla beraber puslu mantığın kökenine ilişkin bir incelemede "pusluluk" kavramıyla çeşitli açılardan ilgi içerisinde olduğu düşünülen bazı kavramlardan söz etmek yerinde olacaktır. Bu kavramların incelenmesi ve sınırlarının açık bir şekilde ortaya konulması pusluluk ile ona yakın görülen kavramlar arasındaki farkın çok daha iyi bir şekilde ortaya konmasını sağlayacaktır.

Geçtiğimiz yüzyılda, matematik ve bilimin tâbi olduğu mevcut paradigmanın temel kriterlerinden biri olan **"katiyet"** kavramına karşı bir takım eleştiriler geliştirilmiştir. Bilindiği gibi geleneksel görüşe göre bilim tümüyle katiyet için uğraşmalıdır. Ancak fizik biliminde 19. yüzyıl sonlarında başlayan moleküler düzeydeki çalışmalar, katiyet kavramının atom-altı varlıklar için kullanılamayacağını göstermiş; bu durum daha önce tümüyle bilim dışı kabul edilen **"müphemlik"** kavramını, üzerinde durulması ve incelenmesi gereken bir konu haline getirmiştir⁴⁰. Fizikteki bu gelişmelerin ortaya çıkardığı yeni yaklaşım ise müphemlik kavramını bilim için bir esas olarak almış; onu aşılmaz bir bela olarak değil gerçekte oldukça kullanışlı bir kavram olarak değerlendirmiştir⁴¹.

³⁹ Baturone, v.d., **a.g.e.**, s. 4.

⁴⁰ George J. Klir, Bo Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, USA, Prentice Hall, 1995, s. 1.; Klir ve Yuan'ın bazı kavramlar için kullandıkları terimler esas aldığımız terminolojiye uygun değildir. Örnek olarak Klir ve Yuan'da "certainty" terimi katiyet anlamına gelmekteyken, "uncertainty" terimi "müphemlik" durumuna işaret etmektedir. Kabul ettiğimiz terminolojide ise "uncertainty" müphem durumlardan sadece birisine işaret eden bir terimdir. Bu nedenle "uncertainty" terimi metnin genelinde "şüphelilik" terimiyle karşılanmıştır; Klir ve Yuan'dan yapılan alıntılarda ise türkçeye müphemlik olarak çevrilmiştir. Benzeri bir durum "ambiguity" ve "imprecision" terimleri için de geçerlidir. Bazı kaynaklardan yapılan alıntılarda, bağlama uygun olarak bu terimler de türkçeye "müphemlik" olarak çevrilecektir.

⁴¹ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 1.

Pozitif bilimler için müphemlik kavramının yeni bir anlam ve boyut kazanışı sadece bilimsel gelişmelerle değil, bu gelişmelerin gündeme taşıdığı yeni düşünsel yapının inşasına önemli katkılarda bulunan felsefi çalışmalarla da doğrudan ilişkilidir. Birbirinden farklı müphem durumları ifade eden **“belirsizlik”** (vagueness), **“kesin olmayış”** (imprecision), **“tam doğru olmama”** (inexactness), **“şüphelilik”** (uncertainty) vb. gibi kavramlar felsefenin oldukça eski tartışma alanları olup pek çok filozof tarafından farklı şekillerde ele alınmışlardır. Aristoteles ve antikçağın diğer bazı filozofları müphemliği daha çok **modaliteler** (önergelerin **imkanı** (possibility), **zorunluluğu** (necessity) vb.) açısından işlemişler; konuyu ele alış biçimleriyle ortaçağ boyunca yapılan bu türden çalışmalara zemin hazırlamışlardır. Ancak sözünü ettiğimiz kavramları ayrıntılı olarak değerlendirmeye çalışan filozoflar içerisinde ilk sırada ele alınması gereken kişi Leibniz’dir. Filozofun, **“Nouveaux Essais”** adlı oldukça kapsamlı çalışması sözcüklere ilişkin problemleri; onların anlamları, kesin olmayışları ve hatalı kullanımlarına ilişkin tartışmaları içermektedir⁴².

Leibniz’den geçtiğimiz yüzyıla kadarki süre içerisinde bu alanda kayda değer bir çalışma olmaması, ilgili dönemin felsefi yapısı ve bilimsel paradigmasında katıyet kavramının ne denli baskın olduğunun bir delili sayılabilir. Leibniz sonrası, bu alanın önemini kavrayan; müphemliği belirsizlik kavramı altında inceleyerek mantık ve matematik açısından değerlendirilmesinin zorunluluğunu ortaya koyan ilk filozoflar Charles Sanders Pierce ve Bertrand Russell olmuştur⁴³. Bu konuyla ilgili olarak Russell’in daha sonra makale olarak da yayınlanmış olan⁴⁴, 25 Kasım 1922’de Jowett Society’de yaptığı **“Vagueness”** başlıklı konuşma dikkat çekicidir⁴⁵. 1930’lardan itibaren belirsizlik ve diğer müphem durumlar ile mantık arasındaki ilişki üzerine yapılan felsefi tartışmalar özellikle Copilowish ve Hempel’in katkıları çerçevesinde tanınır hale gelmiş⁴⁶; bu kavramı merkeze alan bir takım yeni mantık teorileri geliştirilmeye başlanmıştır. Bu mantık teorileri içerisinde belki de en

⁴² Ostasiewicz, **a.g.e.**, s. 1.

⁴³ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 24.

⁴⁴ Söz konusu makale 1 Haziran 1923’de “The Australasian Journal of Psychology and Philosophy”de yayınlanmıştır.

⁴⁵ **Bkz.:** Bertrand Russell, “Vagueness”, (Çevrimiçi) <http://cscs.umich.edu/~crshalizi/Russell/vagueness>, 13 Mayıs 2005.

⁴⁶ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 24.

önemlisi, 1965 yılında Lotfi Asker Zadeh'in "Fuzzy Sets" adlı makalesiyle mantık dünyasına tanıttığı puslu mantık teorisidir. Bu teorinin nasıl bir düşünce yapısının ürünü olduğunu ve neleri hedeflediğini açıklayabilmek için öncelikle onun problem alanını kısaca tarif etmek yerinde olacaktır.

Matematik dili ile gündelik dilin kendilerine has özellikleri, şüpheşiz ürettikleri tanımların kesinliğı ile ilgi içerisindeirler. Matematik, totolojik karakterli ve tek anlamlı ifadeler üretirken, gündelik dilin ifadeleri genellikle çok anlamlı ve muğlak olmaktadır. Bunun başlıca sebebi gündelik dilin tanımlarının çoğı zaman sınırları tam olarak belirlenmemiş, yere ve zamana göre farklı anlamlara gelebilen tanımlar olmasıdır. Örneğın matematikte "çift doğal sayı" tanımı, "0"dan başlayarak sonsuza giden tüm pozitif çift sayıları içeren bir küme oluşturur. Burada kümeyi oluşturan elemanlar konusunda bir müphemlik söz konusu değildir. "Hayvan" tanımı da gerçek fizik dünyada yer alan bir kısım canlıları kapsayan bir küme oluşturmakta ve bu çerçevede belirli bir kesinliğe de sahip görünmektedir. Nitekim bu kümenin kuşları, balıkları ve memelileri içerdığı; bitkileri, mineralleri ve metalleri dışarıda bıraktığı açıktır. Ancak virüsler, deniz yıldızları, etobur bitkiler açısından müphem bir durumunun olduğu da ortadadır. Bir matematiksel tanım gibi görünen ancak dikkat edilirse gündelik dile ait bir tanım da içerdığı anlaşılacak "1'den **çok daha** büyük doğal sayılar" ifadesi de yine benzer bir müphemlik taşımaktadır⁴⁷.

Genellikle gündelik dilde ortaya çıkan ve yukarıda örneklemeğe çalıştığımız türden müphem durumları konu edinen puslu mantık teorisi, pozitif bilim anlayışının tersine bunların katileştirilmeye çalışılması yerine tabiatlarına uygun bir biçimde değerlendirilmesi gerektiğı iddiasıyla alternatif bir bakış açısı geliştirmiştir. Ortaya konulduğu günden bugüne geçen kırk yıl boyunca düşünce dünyasında büyük tartışmalar yaratmış olan bu teori, bir çok bilim adamı ve düşünür tarafından heyecan ve beğeniyle karşılanmışken büyük bir muhalif kesimin ise şiddetli, hatta alaycı eleştirilerine maruz kalmıştır⁴⁸.

⁴⁷ Lotfi A. Zadeh, "Fuzzy Sets", **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 19.

⁴⁸ Zadeh, "The Birth and Evolution of Fuzzy Logic", s. 97.

Bu eleştirileri kabaca iki kısımda değerlendirecek olursak ilk kısma girenler mevcut bilimsel paradigmanın kendisini savunma refleksinin ürettiği türden eleştirilerdir. Zadeh bu türden eleştirilerin sebebini şu şekilde değerlendirmektedir:

“Nicel ve kesin olan şeye saygı gösteren; nitel ve kesin olmayanı hor gören Kartezyen gelenek, bir savaş olmaksızın terk edilebilmesine imkan vermeyecek kadar köklüdür. Bu geleneğin temel öğretisi 1883 yılında 19. yy.’ın önemli entelektüellerinden biri olan Lord Kelvin tarafından veciz bir şekilde ifade edilmiştir. O şöyle yazmaktadır: “Fizik biliminde ilk zorunlu adım, herhangi bir konuyu öğrenmeye yönelimde sayısal hesap prensiplerini ve onun ile bağlantılı bazı özellikleri ölçmek için kullanışlı metotlar bulmaktır. Sıklıkla söylediğim gibi hakkında konuştuğunuz şeyi ölçebildiğinizde ve sayılarla ifade ettiğinizde, onun hakkında bir şey bilebilirsiniz. Eğer ölçemiyorsanız; onu sayılarla ifade edemiyorsanız sizin bilginiz eksik ve yetersizdir. Bu bilginin bir başlangıcı olabilir fakat o konu her ne olursa olsun, düşüncelerinizde, bilim durumuna ilerlemede güçlük yaşamanıza neden olur”⁴⁹.

Zadeh’in, puslu mantık teorisine karşı yöneltilen bu tür eleştirilerin ve gelişen şiddetli tepkinin daha iyi anlaşılmasını sağlayacağı düşüncesiyle verdiği örnek⁵⁰ çok çarpıcıdır:

“Profesör Zadeh’in sunumu üzerine kısa bir yorum yapmak istiyorum. Onun önerileri teknik bir bakış açısıyla şiddetle ve hatta vahşice eleştirilebilir. Burada böyle olmayacaktır. Fakat keskin olmayan şu soru sorulabilir: Profesör Zadeh önemli fikirler mi ileri sürüyor yoksa olmasını dilediği fikirlere imkan mı sağlamaya çalışıyor?

... Modern deneysel araştırmalar göstermiştir ki beyin puslu olmaktan uzak, pek çok alanda yüksek derecede açık bir yapıya sahiptir. Artık elektron mikroskopunu kullanan ve bu sayede önceleri sadece puslu bir şekilde görülebilen yapının düzenliliğini açık bir şekilde ortaya koymaya başlamış olan anatomideki beyin araştırmalarının ilerleyişi şimdi çok hızlıdır.

Şüphesiz Profesör Zadeh’in pusluluğa ilişkin şevkini Amerika’daki aşırı müsamahakar yeni politik iklim arttırmaktadır. Puslulaştırma bilimsel müsamahakarlığın bir türüdür. Sabırlı gözlem ve sıkı bilimsel çalışma disiplini kabul görmeyecek cezbedici sloganlara sebebiyet verme eğilimindedir. İtiraf etmek zorundayım ki “puslulaştırma”yı bilimsel metodun yaşayabilecek bir alternatifi olarak düşünemiyorum. Hatta, onun Hilbert’in “bilmek istiyoruz: bileceğiz -Wir wollen wissen: wir werden wissen-” naif iyimserliğine (naive optimism) bağlı kalmasının daha sağlıklı olacağına inanıyorum.

Profesör Zadeh’in (pusluluğun kabul edilebilir hatta kullanışlı olduğu yerlere ve konu dışı durumlara ilişkin) çok sıradan örnekler sunması ve böylece onun belirsiz bir şekilde özetlenmiş metodolojisinin derin bilimsel problemler üzerine bir etkiye sahip

⁴⁹ A.e., s. 95-96.

⁵⁰ Bu örnek 1972 yılında Fransa Bordeaux’da yapılan “İnsan ve Bilgisayar Konferansı”nda Zadeh’in, onun ifadesiyle sonraları puslu mantığın pratik uygulamalarının köşe taşı haline gelen “sözel değişken” konusunda sunduğu bildiriye R. E. Kalman’ın yönelttiği eleştiridir.

olabileceğini ima etmesi büyük haksızlıktır. Herhangi bir durumda “puslulaştırma” yaklaşımı herhangi bir zor problemi çözecekse de bu henüz görülmüş değildir”⁵¹.

Puslu mantık teorisine yöneltilen eleştiriler içerisinde ikinci kısma girenler ise, bu teorinin daha önce tarif etmeye çalıştığımız problem alanının doğru bir şekilde anlaşılamamasından, özellikle de ele aldığı müphem durumların, modal ve **olasılık** (probability) bildiren önermelerin müphemlikleriyle karıştırılmasından kaynaklanan eleştirilerdir⁵². Bu karmaşıklığın giderilebilmesi ve böylelikle puslu mantığın daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle bu teoriyi benimsemiş mantıkçılar tarafından onun esası kabul edilen müphemliklerin yani “**belirsizlik**” ve “**kesin olmayış**” kavramlarının modern yaklaşım çerçevesinde nasıl tanımlandıklarına bakılacak, sonrasında modalite ve olasılık teorisinin esası olan ve **şüphelilik** adı verilen müphemlik incelenerek söz konusu teorilerle puslu mantık teorisinin öze ilişkin farkı ortaya konulmaya çalışılacaktır. Son olarak mevcut karmaşaya sebebiyet veren benzerliklerin neler olduğu üzerinde durularak bu teoriler arasındaki ilişkilerin puslu mantık teorisi çerçevesinde sağlıklı bir zemine çekilmesi konusunda yapılan çalışmalara değinilecektir.

1.2.1. Belirsizlik

“Belirsizlik” ve benzeri durumlar, farklı düşünürlerce her ne kadar farklı şekillerde tanımlanmışlarsa da bu kavramların “dil” gibi anlatımsal sistemlere ilişkin olduğu konusunda genel bir mutabakatın varlığından söz edilebilir⁵³. Bu mutabakatın oluşmasında şüphesiz Russell’in konuyla ilgili düşüncelerinin büyük bir önemi vardır. Daha önce değinmiş olduğumuz “Vagueness” isimli çalışmasında Russell, belirsizliğin şeylere ilişkin özellikler olduğu iddiasını taşıyan düşünürlerle karşı güçlü bir eleştiri ortaya koymuş; şeylerin özellikleriyle onları ifade eden sözcüklerin özelliklerinin farklı olduğunu göstermiş ve bu yüzden belirsizlik ve kesinliğin sadece bir dile ait olabilecek özellikler olduğunu, gösterimden bağımsız bir belirsizlik ya da kesinlikten söz edilemeyeceğini ifade etmiştir⁵⁴. Bu tartışmanın daha iyi

⁵¹ Zadeh, “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, s. 96-97.

⁵² Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 33.

⁵³ **A.e.**, s. 26.

⁵⁴ **A.e.**, s. 25-26., **Bkz.:** Russell, **a.g.e.**

anlaşılabilmesi için Russell’ın ilgili çalışmadaki açıklamalarına başvurmak yerinde olacaktır:

“Felsefi problemler üzerine düşünüş beni, düşünmeye alışık olduklarımdan ya da genelde düşünülenlerden çok daha fazlasının, sembolizm prensipleriyle yani anlam ile o anlamı taşıyan şey arasındaki ilişkiyle bağlantılı olduğuna ikna etti. Yüksek soyut konularla uğraşırken sembolleri (genellikle sözcükleri) kavramak onların temsil ettiği şeyleri kavramaktan çok daha kolaydır. Bunun sonucu, felsefi veya mantıksal olma iddiasını taşıyan hemen hemen her tür düşünüşün dünyaya dilin özelliklerini yüklemiş olmasıdır. Dil dediğimiz şey gerçekten varolduğu için tüm olup bitenlerle açıkça ortak özelliklere sahiptir; bu bakımdan linguistik (dilbilimsel) temellere dayanan metafizik hatalı olamaz. Fakat dil genellikle şeylerce paylaşılmayan çok sayıda özelliğe sahiptir ve bu özellikler metafiziğimize istenmeden girdiğinde bu tümüyle yanıltıcı olur”⁵⁵.

Bu sözleriyle dil ile dünya arasındaki ilişkiye vurgu yapan Russell, dil ile şeyler arasındaki farklılıkların ortaya konulmamasının bizi bir takım hatalı yollara sürükleyebileceği uyarısında bulunmaktadır. Russell’ın aşağıdaki ifadeleri ise belirsizliğin ya da kesinliğin bilgi ile bilinen şey arasındaki bağıntıya ilişkin olabileceğini ancak kendinde şeylere ilişkin olmadığını açıklamaktadır:

“Belirsizlik ve kesinlik (precision) sadece bir ifadeye ait olabilecek özelliklerdir ve bunun bir örneği dildir. Bunlar, bir ifade ile onun belirttiği şey arasındaki bağıntıyla (relation) ilgilidir. İfadenin dışında, ister bilişsel ister mekanik olsun belirsiz ya da kesin şeyler olamaz; onlar ne ise odur ve bir sonu vardır. Hiçbir şey daha az veya daha çok olduğu şey ya da onun sahip olduğu özelliklerin birazını taşıyor olamaz. ... Bilme, bilinen olarak adlandırılan şeyi oluşturan, diğer bir oluşla, oluşlar grubu ya da oluşlar grubunun özelliğiyle belirli bir bağıntıya sahip olan bir oluşturmaktır. Bilgi belirsiz olduğu zaman bu, bilmeye bir oluş olarak uygulanamaz; bir oluş olarak o, diğer tüm oluşlar gibi belirsiz ya da kesin olma yeteneğine sahip değildir. Bilişsel bir oluşta belirsizlik onun bilinene ilişkin bir özelliğidir; kendisinde oluşun bir özelliği değildir”⁵⁶.

Russell’ın ortak kullanımı olan sözcüklerin belirsizliği konusunda verdiği örnekler ve yaptığı açıklamalar son derece ilginçtir:

“Renkler bir süreklilik gösterdiğinden, mükemmel bir biçimde açıktır ki rengin bizi onları kırmızı olarak adlandırıp adlandırmama konusunda şüpheye düşürecek kısımları vardır. Bunun sebebi “kırmızı” sözcüğünün anlamını bilmiyor oluşumuz değil; onun, uygulama kapsamı esasen şüpheli (doubtful) olan bir sözcük olmasıdır. Bu elbette kelleşen adam hakkındaki eski bir şaşırtmacaya da cevaptır. Burada, önceleri kel olmayan bir kişinin tek tek saçlarını kaybettiği ve sonunda kel kaldığı varsayılmakta; bu yüzden, kaybı bu kişinin

⁵⁵ Russell, a.g.e.

⁵⁶ A.e.

kel olmasına neden olacak bir tel saçın var oluşunun zorunluluğu tartışılmaktadır. Bu, elbette saçmadır. Kellik belirsiz bir kavramdır; aralarında kel olup olmadığını söylemenin doğru olmayacağı kişiler varken, bazı kişiler kesinlikle keldir; bazıları kesinlikle kel değildir. Üçüncü halin imkansızlığı kanunu kesin semboller kullanıldığında doğrudur ancak semboller gerçekteki tüm semboller gibi belirsizse doğru olmaz. Tüm sözcükler, “kırmızı” sözcüğünün taşıdığı aynı tür belirsizliğe sahip hassas nitelikleri gösterirler. Bu belirsizlik her ne kadar düşük dereceli de olsa bilimin en katı kesinliğe sahip metre, saniye gibi nicel sözcüklerinde de vardır. Bu sözcüklerin belirsizliğini göstermek için Einstein’a başvuracak değilim. Örneğin metre Paris’te belirli bir sıcaklıkta, bir çubuk üzerindeki iki işaret arasında yer alan mesafe olarak tanımlanır. İşaretler nokta değildir fakat sınırlı bir büyüklüğü gösterirler; onlar arasındaki mesafe kesin bir mefhum değildir. Bundan başka sıcaklık belirli bir doğruluk derecesinden daha öteye ölçülebilir değildir ve bir çubuğun sıcaklığı asla tekdüze olamaz. Bütün bu sebeplerden ötürü metre kesinlik açısından eksik bir kavramdır. Bir saniye için de durum aynıdır. Saniye yeryüzünün dönüşüyle ilişkili olarak tanımlanır fakat yeryüzü katı bir bütünlük değildir ve yeryüzünün iki parçası dönüş için tam olarak aynı süreyi harcamaz; dahası tüm gözlemler belirli bir hata payı taşırlar”⁵⁷.

Russell’ın belirsizlikler hakkında değerlendirmede bulunduğu diğer sözcükler ise özel isimlerdir:

“Şimdi özel isimleri ele alalım. Pek çok insana ait olan bazı özel isimleri konumuz dışında tutuyorum. Bir keresinde Ebenezer Wilkes Smith adında biriyle tanıştım ve başka herhangi birinin bu isme sahip olmadığına inandım. Bu yüzden, sonunda anlam bulanıklığı taşımayan bir sembol keşfettiğimizi söyleyebilirsiniz. Bay Ebenezer Wilkes Smith doğmuştur ve doğum dereceli bir süreçtir. Bu ismin doğumdan önce atfedilebilir olmadığını varsaymak doğal görünecektir. Eğer öyleyse doğum oluyorken ismin atfedilebilir olup olmadığı şüphelidir. Eğer isim doğumdan önce atfedilebilir deniyorsa hiç kimse ismin ne kadar önce atfedilebilir olacağına karar veremeyeceği için anlam bulanıklığı çok daha açık olacaktır. Ölüm de bir süreçtir: ani olarak adlandırıldığı şekilde olsa bile belirli bir süreyi işgal etmek zorundadır. Eğer ceset için ismi kullanmaya devam ediyorsanız, bozulumda dereceli olarak ismin atfedilebilir olmaktan çıkacağı bir aşama gelmelidir fakat hiç kimse bu aşamaya ulaşılan zamanı kesin olarak söyleyemez”⁵⁸.

Russell’a göre, sözcüklere ilişkin belirsizlikler, ister gündelik dile ilişkin ister mantıksal olsun onların kullanıldığı bütün önermeleri de belirsiz kılmaktadırlar:

“Genel bir kavramı kapsayan bir önerme ---örneğin “bu bir insandır”---Brown ya da Jones ya da Robinson olan “Bu” gibi birkaç olguyla doğrulanmış olacaktır. Fakat eğer “insan” kesin bir kavram olsaydı, “bu bir insandır”ı doğrulayabilecek mümkün olgular kümesi oldukça kesin olacaktı. Bununla beraber “insan” kavramı az ya da çok belirsiz olduğundan, teoride bile olsa “bu bir insan mıdır?” sorusuna kesin bir cevap verilmesine imkan tanımayan tarih öncesi örnekler bulmak mümkündür. Böyle örneklerle uygulanışında “bu bir insandır” önermesi ne kesinlikle doğru ne de kesinlikle yanlıştır. Tüm mantık-dışı sözcükler bu türden bir belirsizliğe sahiptir. Buna göre mantık-dışı sözcüklerden oluşmuş ya

⁵⁷ A.e.

⁵⁸ A.e.

da onları kapsayan önermelere uygulanan doğruluk ya da yanlışlık kavramı az ya da çok belirsizdir. Mantık-dışı sözcükler içeren önermeler onların üzerine mantıksal önermelerin inşa edildiği bir temel olduğundan mantıksal önermeler bizim onları bilebildiğimiz kadarıyla “doğruluk” ve “yanlışlık” kavramlarının belirsizliği yüzünden belirsiz olur”⁵⁹.

Russell, ana hatlarıyla ele aldığı ve örneklendirdiği belirsizlik kavramını bağıntı kavramıyla ilişkisi dahilinde şu şekilde tanımlamaktadır:

“Çeşitli şekillerde ilişkili terimlerden oluşan bir sistem, eğer bu sistemin terimlerinin bir başkasının terimleriyle ve aynı şekilde, bir sistemdeki iki ya da daha çok terim o sisteme ait bir bağıntıya ve diğer sistemin ilgili terimleri o sisteme ait olan ilgili bir bağıntıya sahip olduğunda bu sistemin bağıntılarının o sistemin bağıntılarıyla bire-bir bağıntısı varsa, diğer şekillerde ilişkili terimlerden oluşan bu bir başka sistemin doğru bir gösterimidir. Haritalar, grafikler, fotoğraflar, kataloglar vb. doğru oldukları ölçüde bu tanım içerisine girerler.

Bunun karşısı olarak bir gösterim, temsil eden sistemin temsil edilmiş sisteme bağıntısı bire-bir değil de bire-çok olduğunda belirsiz olur. Örnek olarak Brown’ı, Jones’u ya da Robinson’ı eşit şekilde temsil edebilecek şekilde lekelenmiş bir fotoğraf belirsizdir. Küçük ölçekli bir harita genellikle geniş ölçekli olandan daha belirsizdir”⁶⁰.

Puslu mantık alanının önemli isimlerinden olan ve incelemekte olduğumuz konularla ilgili modern yaklaşımın temsilcileri durumundaki Dubois, Ostasiewicz ve Prade, “Fuzzy Sets: History and Basic Notions” (“Puslu Kümeler: Tarihi ve Temel Nosyonları”) isimli ortak çalışmada Russell’ın düşünceleriyle paralellik içerisinde, belirsizlik kavramının bir dilin sembollerinin anlamlarıyla ilgili olmasını onun özsel bir özelliği olarak görmekte ve belirsizliği müphemlik türlerinden biri ya da onun özel bir durumu olarak değerlendirmektedirler⁶¹. Onlara göre herhangi bir nosyon eğer anlamı keskin sınırlarla sabitlenmemişse “belirsiz” olarak adlandırılır⁶². Belirsiz nosyonların tümüyle uygulanabildiği durumlar ve hiçbir şekilde uygulanamadığı durumların yanında kısmi şekilde uygulanabildiği durumlar da vardır. Bu, belirsizliğin, “**pusluluk**” (fuzziness) olarak da adlandırılan ve onu farklı bir müphemliği ifade eden “şüphelilik”ten ayıran özsel bir özelliği durumundaki “**derecelilik**” (gradualness) fenomenini ortaya çıkartmaktadır⁶³. Bu tanımlardan hareketle dereceli yüklemeler içeren önermeleri belirsiz olarak nitelendiren Dubois, Ostasiewicz ve Prade, bu türden önermelerin doğruluk değerlerinin “doğru” ya da

⁵⁹ A.e.

⁶⁰ A.e.

⁶¹ Dubois, Ostasiewicz, Prade, a.g.e., s. 27.

⁶² A.e.

⁶³ A.e.

“yanlış” olamayacağını ama “dereceli” olduğunu ifade etmekte ve bu durumu şu örneklerle açıklamaktadırlar:

“Eğer bir kişi “çok genç” olarak nitelendirilirse bu, “bu kişi gençtir” önermesinin doğruluk derecesinin “çok” olduğu anlamına gelir. Bu tip dilsel sınırlar sadece dereceli yüklemelere uygulanırlar. Bu böyle yüklemelerin fark edilmesi için bir metodoloji sağlar. Örneğin “bekar” dereceli bir yüklem değildir. Çünkü “çok bekar” kullanılabilen bir ifade değildir”⁶⁴.

Dereceli yüklem ve dolayısıyla dereceli doğruluk düşüncesi, klasik mantığın bazı paradokslarının çözümlenmesini sağlıyor oluşuyla da dikkat çekmektedir. Bu paradokslardan birisi olan ve

Eğer bir kum yığını küçükse, ona tek bir kum tanesi eklendiğinde de
o küçük kalacaktır.

Tek bir taneli bir kum yığını küçüktür

O halde bütün kum yığınları küçüktür

şeklinde ifade edilen kum yığını paradoksu Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin ifadesine göre, “küçük” dereceli yüklemine yanlış bir biçimde ya var ya da yok (all-or-nothing) ilişkisiyle değerlendirilmesi sonucu ortaya çıkan bir paradokstur ve eğer “kum yığını küçüktür” önermesinin doğruluk derecesinin kum yığınına her bir kum tanesi eklendiğinde azalacağı kabul edilirse paradoks ortadan kalkar⁶⁵.

Dubois, Ostasiewicz ve Prade bütün dillerde pusluluk ve belirsizlik durumlarının mevcut olduğunu belirtmekte; bunların kaynağı olarak görünen iki durumu şu şekilde sıralamaktadırlar⁶⁶:

1) Herhangi bir dil ya da daha genel bir ifadeyle herhangi bir gösterimsel sistem süreksizken (discrete) dış dünya sürekli (continuous) olarak görünmektedir (natura non facit saltis). Aristoteles’in de kabul ettiği gibi, dillerdeki belirsizliğin

⁶⁴ A.e.

⁶⁵ A.e., s.27-28.

⁶⁶ A.e., s. 28.

ortak oluşunun sebebi süreksiz gösterimler ve sürekli algı durumu arasındaki bu boşluktur.

2) Belirsizliğin ve nesne sınıflarını gösteren sembollerin dereceliliğinin diğer bir sebebi, doğal dillerde istisnai durumların göz ardı edilebilmesini sağlayan bir toleransın gelişmiş olmasıdır. Örnek olarak insanların “kuş” olarak adlandırdığı bazı hayvanlar uçabilirlerken bazılarının kanadı bile yoktur. Diğer bir deyişle kuşlar arasında bazıları diğerlerine göre daha “tipik”tir.

Dubois, Ostasiewicz ve Prade’ye göre belirsizliğin yukarıda ifade ettiğimiz sebeplerinden ilki yani gösterimsel sistemlerin süreksizliği sorunu, bazı sözcüklerin sürekli bir ölçek üzerinde tanımlanması suretiyle aşılabılır görünmektedir. Örnek olarak “genç” sözcüğünün insanlara uygulanışında istenildiği kadar ayrıntılı şekilde tasarlanabilecek (yıllara, aylara, haftalara vb. bölünmüş) bir yaş ölçeği kullanılabilir. Ancak buradaki asıl sorun bir ölçek oluşturmada değil “genç” sözcüğü için alt ve üst eşiklerin ne olduğunun belirlenmesindedir⁶⁷. Bu sorun, belirsizce tanımlanmış sınıflar için bir üyelik eşiği olup olmadığı tartışmasının da merkezi durumundadır. Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin ifadesiyle, puslu mantıkta, puslu bir sınıfın klasik bir sınıfa dönüştürülmesi gibi istisnai durumlar dışında, bir eşiğin olmadığı düşünülür. Eğer üyeliği üye olmayıştan ayıran bir eşik varsa belirsiz kavramlar için “çelişmezlik” ve “üçüncü halin imkansızlığı” kanunları geçerli olacaktır. Eğer böyle bir eşik yoksa mantığın bu temel kanunları zorunlu olmaktan çıkacaktır⁶⁸.

1.2.2. Kesin Olmayış

Puslu mantığın esası kabul edilen diğer bir müphem durum “kesin olmayış”tır. Dubois, Ostasiewicz ve Prade’ye göre kesin olmayış, dilin, daha çok ölçülebilir kavramları ve metrik özelliklerine, dolayısıyla sayılara ilişkin bir karakteristiği olup herhangi bir ölçümün sonuçlarının doğruluğunun sınırlı oluşu gerçeğinden kaynaklanmaktadır⁶⁹. Russell’ın, belirsizlik başlığı altında ele aldığımız, “metre” ve “saniye” yani mekan ve zaman ölçüleri hakkındaki değerlendirmelerinin

⁶⁷ A.e.

⁶⁸ A.e., s. 29.

⁶⁹ A.e.

kesin olmayış ile yakından ilişkili olduğu söylenebilir. Nitekim bir ölçümün sonuçlarının doğruluğunun sınırlılığı yani kesin olmayışı, ölçüm işlemiyle alakalı olduğu kadar ölçü için kullanılan kavramların belirsizliği ile de alakalı görünmektedir.

Kesin olmayışın mantıktaki örneği ise alternatif ilişki yani “veya” eklemi taşıyan bileşik önermelerin durumudur. “p veya q” gibi bir bileşik önermenin doğruluk değeri, “veya” eklemi gereği p ya da q önermelerinden herhangi birisinin doğru olması durumunda doğru olurken, sadece her ikisi de yanlış olduğunda yanlış olmaktadır. Bu tanımla, p ve q önermelerinin her ikisinin doğru olması durumunda da bileşik önermenin doğru olacağı anlaşılmaktadır. “p veya q doğrudur” gibi bir bileşik önerme “p veya q”nun doğru olduğunu söylemekteyse de bu doğruluğu sağlayan şey p’nin doğru olması mı, q’nun doğru olması mı yoksa her ikisinin de doğru olması mıdır? sorusuna cevap verememekte; bu nedenle bu türden önermeler kesin olmayan önermeler olarak adlandırılmaktadırlar⁷⁰.

1.2.3. Şüphelilik

Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin ifadesiyle, belirsizlik ile kesin olmayış ifade edilmiş bir bilginin içeriğine işaret ederlerken “şüphelilik” bir önermenin doğru olup olmadığını iddia edebilme yeteneğine işaret eder; yani şüphelilik, önermelerin doğruluk durumlarına ilişkin kısmi inanışa ait bir müphemlik durumudur. Daha açık bir şekilde ifade edersek şüphelilik ile kastedilen şey bir önermenin doğru ya da yanlış olup olmadığı konusunda tam olarak emin olmayan bir kişinin, bu önermenin nihayetinde doğru ya da yanlıştan başka bir değere sahip olamayacağı olgusunu sorgulamaksızın geliştirdiği kanaatleriyle ilgili bir müphemliktir⁷¹.

Dubois, Ostasiewicz ve Prade’ye göre şüpheliliğin ilki önermeler mantığı diğeri ise olasılık teorisiyle modellenen iki tarzı vardır: Bunlardan ilkinde göre

“...şüphelilik üç değerlidir: ya bir önermenin doğruluğu hakkında emin olunabilir; ya onun değili hakkında emin olunabilir ya da her iki durum için de emin olunamayabilir. Bu üç durum hakkında ifadede bulunmak ve akıl yürütmek ise modal mantığı gerektirmektedir. Bu mantıkta, katiyetin modal zorunlulukla karşılandığı ve ispatlanabilirliği yansıttığı yerde

⁷⁰ A.e.

⁷¹ A.e., s. 30., 35.

katiyetin olmayışı modal imkan ile karşılanır ve mantıksal tutarlılığı yansıtır...Önermeler mantığı sadece eksik ya da kesin olmayan bilgiden kaynaklanan şüphelilik üzerinde durur”⁷².

İkincisi yani olasılık teorisi ile modellenen şüphelilik ise

“açık bir şekilde çelişikliği gözlemlenen bilgilerden kaynaklanan şüpheliliği ele alır. Bu genellikle tesadüfi bir deneyin birkaç deneme içerisinde aynı sonuçları vermeyeşine ilişkin istatistiksel bir durumdur”⁷³.

Önemli puslu mantık uzmanlarından birisi olan Gupta da, şüpheliliğin iki farklı türünden söz etmektedir. Ancak daha önce bu konudaki terminolojinin henüz yerleşmemiş olduğuna dair açıklamamızın bir gerekçesi olarak da gösterebileceğimiz bu ayrım Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin terminolojisine göre şüphelilikten çok müphemliğe ait bir ayrım olarak görünmektedir. Çünkü Gupta’ya göre birinci tür şüphelilikler düşünme, akıl yürütme, algılama ve kavrama süreçlerinden ya da daha genel olarak kavrayışa ilişkin bilgiden kaynaklanan fenomenlerle ilgiliyken diğerleri fiziksel sistemlerin tesadüfi davranışlarından ortaya çıkan bilgi ya da fenomenlerle ilgilidir⁷⁴. Bu ayrıma göre birinci tür şüphelilik olarak adlandırılan şeylerin puslu mantığın konusu olarak değerlendirilebilecek müphemlikler olduğu anlaşılmaktadır. Ancak Gupta, ikinci tür şüphelilik ile Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin şüpheliliğin olasılık teorisi tarafından incelenen alanına işaret etmekte ve bu bağlamda onlarla paralel düşünmektedir.

Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin, belirsizlik, kesin olmayış ve şüphelilik arasındaki farkları ortaya koymak için verdikleri örnek ifadeler dikkate değerdir⁷⁵:

Bu araba 10 ila 15 yaşındadır (salt kesin olmayış).

Bu araba çok büyüktür (kesin olmayış ve belirsizlik).

Bu araba muhtemelen (probably) Almanya’da yapılmıştır (şüphelilik).

⁷² A.e., s. 30.

⁷³ A.e.

⁷⁴ Madan M. Gupta, “Cognition, Perception and Uncertainty”, **Fuzzy Computing: Theory, Hardware, and Applications**, Ed. Madan M. Gupta, Takeshi Yamakawa, Netherlands, Elsevier Science Publishers B.V., 1988, s. 4.

⁷⁵ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 31.

İlk ifade nicel bir değerlendirme konusundaki yetersizlikten kaynaklanan bir müphemliği içerdği için kesin olmayışın bir örneğidir. İkinci ifade, “büyük” sözcüğünün tanımının belirsiz oluşu ve “çok” niceleyicisinin büyüklüğün çok kaba bir derecesini göstermekle kesin olmayan nicel bir değerlendirmeyi ifade etmesi nedeniyle hem belirsizlik hem de kesin olmayışın örneği iken üçüncü ifade bir önerme hakkındaki şüpheliliğe işaret etmektedir.

1.2.4. Derecelilik, İmkan, Olasılık

Konu edindikleri müphem durumlar üzerine şimdiye kadar yaptığımız değerlendirmelerin bir sonucu olarak modal mantık ve olasılık teorisi ile puslu mantık teorisinin esas itibarıyla farklı olduklarını ortaya koymuş olsak da, bunların birbirlerine karıştırılmalarına sebep olan benzerliklerin neler olduğu üzerinde de durmak gerekmektedir. Böylelikle ilgili tartışmaların sebepleri ve boyutları hakkında daha kapsamlı bir fikir edinilebilecektir.

Modal mantık, daha önce de değindiğimiz gibi Antikçağ’da Aristoteles ve başta Stoa-Megara olmak üzere bazı mantık okulları tarafından geliştirilmiş ve sonrasında pek çok mantıkçı tarafından işlenmiş bir mantık alanı olup nicelik ve nitelik yönünden taşıdıkları özelliklere dayanılarak tanımlanan kategorik önermelerden farklı olarak, önermelerin tamamına ait özelliklerin dikkate alınmasıyla tanımlanan ve “modal” adı verilen önermeleri konu edinir⁷⁶. Modal önermeler assertorik, apodiktik (zorunlu) ve mümkün önermeler olmak üzere üçe ayrılır. Puslu mantıkla modal mantığın bütünüyle aynı şeyi ifade ettiğine dair yanlış düşünce ise puslu mantıktaki derecelilik ile modal mantıktaki mümkün önermelere ilişkin “imkan”ın birbirine karıştırılmasından kaynaklanmaktadır.

İmkan kavramının daha iyi anlaşılması için örnek olarak Aristoteles tarafından ortaya konmuş şu önermeler verilebilir⁷⁷:

“Yarın bir deniz savaşı olacak” (p)

“Yarın bir deniz savaşı olmayacak” ($\sim p$)

⁷⁶ Şafak Ural, **Temel Mantık**, genişletilmiş 2. bs., İstanbul, Çantay Kitabevi, 1995, s. 57-58.

⁷⁷ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 33.

İki değerli mantık açısından değerlendirildiğinde bu iki önermenin birlikte evetlenmesi söz konusu olamaz yani “Yarın bir deniz savaşı olacak ve yarın bir deniz savaşı olmayacak” önermesi “çelişmezlik kanunu” nedeniyle her durumda yanlış olacaktır. Oysa bu iki önermenin veya ile birleşimi yani “Yarın bir deniz savaşı olacak veya yarın bir deniz savaşı olmayacak” önermesi “üçüncü halin imkansızlığı” kanunu nedeniyle her zaman doğru olmaktadır. “Yarın bir deniz savaşı olacak ve yarın bir deniz savaşı olmayacak” önermesinin doğru olabileceği tek durum her ikisinin de mümkün olması durumudur⁷⁸. Dubois, Ostasiewicz ve Prade’nin şu açıklamaları niçin derecelilik ile imkanın tam olarak aynı şey olmadığını ortaya koymaktadır:

“Yirminci yüzyılın çok değerli mantık geleneğine kadar, iki değerlilik prensibinin böyle bir zeminde etkisiz olduğunun iddia edilmesi ve imkanın üçüncü bir doğruluk değeri olarak düşünülmesi yönünde yinelenen bir eğilim gelişmiştir. Ancak, “mümkün p” önermesi “p” ile aynı değildir; “mümkün $\sim p$ ” de “mümkün p’nin değili” değildir. Bu yüzden “mümkün p ve mümkün $\sim p$ ” önermesinin doğru olabilirliliği olgusu çelişmezlik kanunundan şüpheyi gerektirmez. Tersine, belirsiz ya da puslu önermelerden birisi olan “p ve $\sim p$ ” önermesi, örneklerinin dereceli sınırlarından dolayı bazı durumlar için bütünüyle yanlış değildir”⁷⁹.

Bu açıklamadan anlaşılacağı üzere, modal mantık için iki değerli mantığın çelişmezlik kanununun reddi söz konusu değilken, daha önce belirsizlik başlığı altında da ifade ettiğimiz gibi, derecelilik söz konusu olduğunda çelişmezlik kanunu zorunlu olmaktan çıkmaktadır.

Modal mantıkla yakından ilişkili çok değerli mantığın gelişmeye başladığı ve imkanın bir tür derecelilik olarak ele alındığı dönemde, imkan ve olasılık kavramları da birbirine karıştırılmıştır. Bu karışıklık, olasılıkçı geleneğin araştırmacıları yanıltmasına, çok değerli mantığın olasılık üzerine akıl yürütmeler için uygun bir ortam olarak değerlendirilmesine neden olmuş, bu bakış açısı olasılık kanunlarını mantığa ithal etmeyi amaçlayan pek çok çalışmaya da temel oluşturmuştur⁸⁰. Söz konusu teorilerin bu içiçeliği, olasılıkçı düşünürlerin puslu mantık teorisini niçin olasılık teorisinden bağımsız olarak değerlendiremediklerini anlamamızı sağlayacak

⁷⁸ A.e.

⁷⁹ A.e., s. 33-34.

⁸⁰ A.e., s. 34, 35.

bir takım ipuçları vermektedir. Kalman'ın, Zadeh'e yönelik şu eleştirisi ise olasılıkçaların puslu mantık teorisine karşı genel tavrını özetler niteliktedir:

“Profesör Zadeh eğer benim bilimsel araştırmayı yalnızca katı kesinlik ya da “klasik” matematiksel modeller açısından değerlendirdiğimi söylemek istiyorsa pozisyonumu yanlış bir şekilde tasvir etmektedir. Belirsiz olarak tanımlanmış fenomenler için yararlı bir kavrayışa sahip olma arzusu çok eskidir. Örnek olarak bu, olasılık teorisi ve topolojinin gelişmesine yol açmıştır. René Thom yakın zamanda doğal sistemlerin evriminde kesintili (discontinuous) değişimleri yöneten, son derece iyi planlanmış “felaketler” teorisiyle topolojinin bu eski görüşünü yeniden ortaya koymuş ve oldukça genişletilmiştir. Bu teorilerin tamamı kesin olmayan tanımlara sahip durumlara ilişkin sonuçlara ulaşmak için kesin akıl yürütme kullanırlar. Onlar belirgin kavrayışlara da yol gösterirler.

O halde sorun Profesör Zadeh'in kesin akıl yürütmeyi bir kenara atıp puslu kavram ve algoritmalara güvenerek daha iyisini yapıp yapamayacağıdır. Onun herhangi bir önemsiz olmayan problemi çözebileceğine dair hiçbir kanıt yoktur”⁸¹.

Yukarıdaki eleştiriden, Kalman ve onun gibi düşünenlerin, temsil ettikleri bilimsel paradigmanın müphem konularla uğraşmak için en ideal aracı olarak olasılık teorisini gördükleri ve bu nedenle puslu mantığa ihtiyaç olmadığı şeklinde bir kanaat geliştirdiklerinin anlaşılması güç değildir. Ancak bu kanaatin aksine Newton mekaniğinin atom-altı alanda yetersiz kaldığının anlaşılmasıyla geliştirilmiş istatistiksel mekanik ve bununla bağlantılı olan olasılık teorisinin, 1960'lardan sonra geliştirilen bir takım yeni teoriler ile müphemliğin birkaç farklı tipinden sadece birisi ile ilgili olduğu gösterilmiş⁸² bu durum olasılıkçıların iddialarını bilimsel anlamda da çürüten bir takım gelişmelere yol açmıştır.

Önceki açıklamalarımızdan da hatırlanacağı gibi, olasılık teorisinin değerlendirdiği verilerinin şüpheli olması, tesadüfi değişkenler üzerine üretilmiş veriler olmalarından kaynaklanmaktadır. Halbuki puslu verilerin müphemliği, içerdikleri tanımların dereceli olması yani kati bir biçimde sınırlandırılmamasından kaynaklanmaktadır. Örnek olarak yazı-tura oyununda paranın yazı ya da tura gelmesi olasılığı istatistiksel olarak her iki durum için de % 50'dir. Bu sonuç, “bir deneme için para ya yazı ya da tura gelecektir” şeklinde yorumlanabilir. Burada istatistiğin yaptığı şey, tesadüfi, dolayısıyla şüpheli bir durumu önceden tespiti çalışmaktır. Ancak puslu ifadeler, örneğin “sıcak oluş”, bir olasılık durumundan ötürü değil, bu ifadenin içerdiği “sıcaklık” kavramının tanımındaki eksikliklerden kaynaklanan bir

⁸¹ Zadeh, “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, s. 97-98.

⁸² Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 3.

belirsizlik taşımaktadır. Nitekim bir Eskimo'nun "havanın sıcak oluşu"ndan kastettiği şey ile bir Arap'ın kastettiği şey birbirinden farklıdır. Bunun sebebi, her ikisinde de "havanın sıcak oluşu" gibi ortak bir nosyon bulunmasına karşın, bu nosyonun, yaşadıkları coğrafyanın iklim koşullarına bağlı olarak farklı bir biçimde ortaya çıkması; dolayısıyla her insan için ortak bir tanımının bulunmuyor olmasıdır.

Puslu mantık literatüründe derecelilik ile olasılık arasındaki farkı açık kılmayı amaçlayan daha pek çok örnek bulmak mümkündür. Bunlardan birisi Kosko ve Isaka'nın yine "sıcaklık" kavramını konu alan örneğidir:

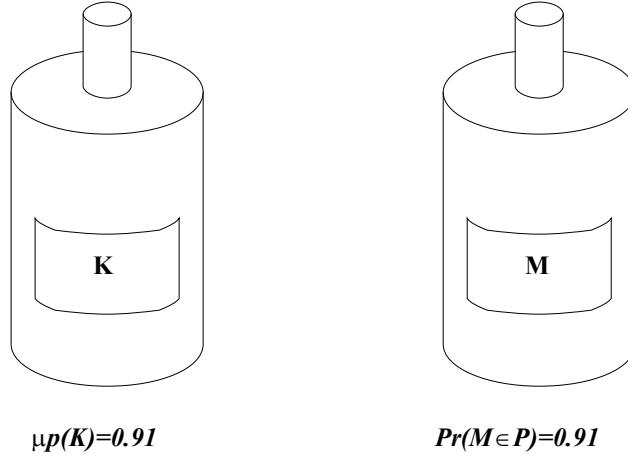
"Bu alana ilişkin bazı eleştirilerde akla gelmeyen bir husus puslu dereceler ile olasılık yüzdelerinin aynı şey olmayışlarıdır. Olasılıklar bir şeyin olup olmayacağını ölçer. Pusluluk ise bir şeyin ortaya çıkış ya da bir şartın varoluş derecesini ölçer. "Havanın soğuk olma şansı yüzde 30'dur" ifadesi soğuk hava olasılığını bildirir. Fakat "bu sabah yüzde 30 soğuk hissediliyor" ise havanın bir miktar soğuk olduğu ve aynı zamanda değişkenlik gösteren miktarlarda ılık olduğu anlamına gelir"⁸³.

Kosanovic'e göre derecelilik ile olasılık arasındaki en büyük ama en yüzeysel benzerlik her iki sistemin de değerlendirdikleri müphemlikleri birim aralıktaki sayılar ile ölçüp tanımlamaları; yapısal benzerlik ise her iki sistemin de cebirsel olarak küme ve önermelerin birleşirlik, yer değiştiricilik ve dağıtıcılık özelliklerini kullanmalarıdır⁸⁴. Bu benzerliklerin tümüyle yanıltıcı olduğunun altını çizen Kosanovic açık bir ayırım için şu örneği vermektedir⁸⁵: $L = \{\text{Bütün likitlerin kümesi}\}$ ve $P = \{\text{Bütün içilebilir likitlerin kümesi}\}$ olduğunu ve Şekil 1'de gösterilen K ve M gibi iki şişe bulduğumuzu varsayalım.

⁸³ Bart Kosko, Satoru Isaka, "Fuzzy Logic", (Çevrimiçi) <http://sipi.usc.edu/~kosko/Scientific%20American.pdf>, 12 Haziran 2005.

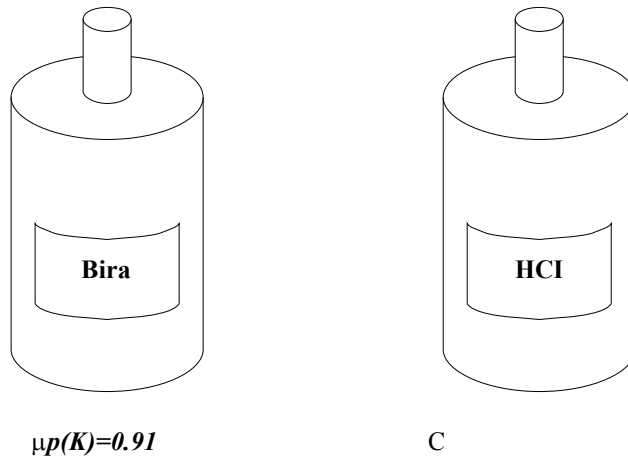
⁸⁴ Bogdan R. Kosanovic, "Fuzziness and Probability", (Çevrimiçi), <http://www.neuronet.pitt.edu/~bogdan/research/fuzzy/fvsp/fvsp.html>, 12 Haziran 2005.

⁸⁵ Kosanovic, **a.g.e.**



Şekil 1. Susuz Yolcu İçin Bir Çift Şişe

Eğer bir haftadır çölde susuz kalmışsak ve ölmek için bu şişelerin birinden içmek zorundaysak hangi şişeyi seçersiniz sorusuna çoğu insan K şişesi cevabını verecektir. Çünkü K'nın, varsayalım çamurlu su içermesi durumunda bile, hidroklorik asit gibi içildiğinde öldürücü olabilen bir likit içermeyeceği düşünülecektir. 0.91 üyelik derecesi, K'nın içeriğinin, tamamiyle içilebilir suya yani saf suya oldukça yakın olduğunu ifade etmektedir. Diğer taraftan M'in içilebilir olma ihtimalinin 0.91'e eşit olması, pek çok deneyim sonrasında M'in içeriğinin denemelerin %91'inde içilebilir olarak düşünüldüğü; ancak bu deneyimlerin geride kalan %9'unda yani yaklaşık 10'da 1 olasılık ile öldürücü olacağı anlamına gelmektedir. Bu yüzden çoğu denek şansını çamurlu suda denemeyi tercih edecektir.



Şekil 2. Susuz Yolcu İçin (Ne Olduğu Belli) Bir Çift Şişe

Diğer bir farklılık ise analizle ortaya çıkmaktadır. K'nın ve M'nin içeriklerini analiz edebildiğimizi ve Şekil 2'de gösterildiği şekliyle keşfettiğimizi varsayalım. Analiz sonucunda K için üyelik değeri değişmemekteyken, M için olasılık değerinin 0.91'den 0'a düştüğüne dikkat edilmelidir.

Şimdiye kadar vermiş olduğumuz tanımlar ve yapmış olduğumuz açıklamalar modal mantık, olasılık teorisi ve puslu mantığın, farklı müphemliklerle ilgilenen ve birbirlerinden bağımsız olarak değerlendirilmesi gereken disiplinler olduğunu ortaya koymuştur. Bu sonuca göre puslu mantığın konusu olan belirsizlik ve kesin olmayışın, sözü edilen diğer disiplinler çerçevesinde değerlendirilebildiğine dair inanın yanlış; bu inanış üzerinden puslu mantığın meşruiyetini sorgulayan eleştirilerin ise dayanaksız olduğu söylenebilir. Nitekim, gelişim süreci boyunca çalışma sahasını sürekli genişletmiş olan puslu mantığın günümüzde ulaştığı nokta, onun, belirsizlik ve kesin olmayıştan farklı ancak onların bir sonucu olarak değerlendirilebilen şüpheliliği⁸⁶ hem imkan hem de olasılık bağlamında incelemesini mümkün kılmaktadır. Bu durum, sözünü ettiğimiz yanlış inanın tam tersi bir gelişme olarak karşımıza çıkmaktadır.

Puslu mantığın şüpheliliği imkan açısından inceleyen çalışma sahası “imkan teorisi” olarak adlandırılmaktadır. Bu teori, mümkün durumları klasik modal mantığın iki değerlilik prensibinin aksine derecelilik açısından ele almakta, böylelikle onları mümkün, hayli mümkün, hemen hemen imkansız, vb. değerler taşıyan sözel değişkenler olarak değerlendirmektedir⁸⁷. İmkan teorisi puslu mantığın ilgili şüphelilikleri işleme yeteneğini sergiliyor oluşu yanında, modal mantığa yeni açılımlar sağlaması açısından da çok önemli bir model durumundadır.

Şüpheliliğin olasılıklara ilişkin kısmıyla da ilgilenen puslu mantık, klasik mantıksal sistemlerin sayısal ve aralık-değerli olasılık teorisini, önerdiği olası, çok olası, 0.8 civarında, yüksek vb. şeklinde örneklenebilecek sözel ya da daha genel ifadeyle puslu olasılık kavramı ile zenginleştirmiş⁸⁸, bu katkılarıyla olasılığın tüm boyutlarıyla ele alınabilmesini sağlayacak bir zeminin oluşumuna öncülük etmiştir.

⁸⁶ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 30.

⁸⁷ Lotfi A. Zadeh, “Knowledge Representation in Fuzzy Logic”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 765.

⁸⁸ **A.e.**

Zadeh'in şu açıklamaları, puslu mantık teorisinin olasılık teorisine bakışının ve onunla kurduğu ilişkinin anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır:

“Olasılık teorisi ve puslu mantık arasındaki ilişki uzun süredir bir tartışma konusu durumundadır. Bu çalışmada açık seçik bir şekilde ortaya konulan durum olasılık teorisinin kendi başına gerçek dünyanın şüpheliliği ve kesin olmayışı ile uğraşmak için yeterli olmadığıdır. Onun etkinliğini arttırmak için olasılık teorisi, puslu mantıktan alınacak kaynaştırılmış bir kavramlar ve teknikler bütününe ihtiyaç duymaktadır. ...Sonuç olarak olasılık teorisi ve puslu mantık birbirlerine rakip değil birbirlerini tümleyicidirler”⁸⁹.

⁸⁹ Lotfi A. Zadeh, “Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competitive”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 805.

2. Puslu Küme, Sözel Değişken ve Sözel Eşik Kavramları, Puslu Kümeler Arasındaki Temel İlişki Biçimleri

2.1. Puslu Kümeler¹

Yukarıda “**pusluluk**” kavramı ile onunla yakından ilişkili görülen kavramlar arasındaki benzerlikler ve özellikle farklılıklar üzerinde durduk. Şimdi doğrudan doğruya “pusluluk” kavramını tanımlamaya, onun özelliklerini ortaya koymaya çalışalım.

Daha önce de değindiğimiz gibi kati tanım ve sınırları bulunan terimler ifade eden klasik² kümelerden farklı olarak, belirsiz ya da kesin olmayan, dolayısıyla dereceli olan terimleri ifade eden kümeler “**puslu küme**” olarak adlandırılırlar. Zadeh’in puslu küme kavramını tanıttığı “Fuzzy Sets” adlı özgün makalesinde yapmayı amaçladığı şey, bu türden kümelerin bazı temel özelliklerini ve içeriğini bir ön hazırlık çalışması kapsamında keşfetmektir³. Zadeh’e göre puslu küme kavramı, (katiyet yerine pusluluğu esas alan) çok geniş bir uygulama sahasına sahip olacağı görülebilecek bir kavramsal yapının inşası için çok uygun bir hareket noktasıdır⁴.

Zadeh, puslu kümeleri $f_A(x)$ şeklinde gösterilebilecek üyelik fonksiyonları olarak tanımlar. Bu gösterime göre A ilgili puslu kümeyi, x ise bu küme içindeki bir üyeyi, fonksiyonun alacağı değer ise x’in üyelik derecesini gösterir. Klasik kümeler için o küme içinde yer alan herhangi bir nesnenin üyelik derecesi “1” iken, o küme

¹ Puslu küme kavramı, bazı çalışmalarda, daha sonra ayrıntılı bir şekilde inceleneceği üzere, konuşma evreni ya da diğer bir deyişle evrensel küme (universal set) ile ilişkisi açısından değerlendirildiğinden puslu altküme olarak adlandırılmıştır. Ancak biz, birtakım karışıklıklara mahal vermemek için metnin genelinde, çalışmalarını kendimize esas aldığımız L. A. Zadeh’in de kullandığı şekliyle bu kavramı puslu küme olarak ifade edeceğiz. Bu nedenle, söz konusu çalışmalardan yapacağımız alıntılarda, gerekli olmadıkça, puslu altküme yerine puslu küme tabirini kullanacağız. Yine aynı gerekçeyle, farklı notasyonlarla yazılmış ifadeleri Zadeh’in notasyonuna uygun bir şekilde ifade edeceğiz.

² Bazı metinlerde klasik küme yerine, onunla aynı anlama gelen basit (crisp) küme ya da sıradan (ordinary) küme tabirleri kullanılmaktadır. Ancak metnin bütününde, terminolojik bir tutarlılık sağlamak amacıyla yapılan tüm alıntılarda klasik küme tabiri tercih edilmiştir.

³ Lotfi A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 19-20.

⁴ A.e., s. 20.

içerisinde yer almayan bir nesnenin üyelik derecesi “0”a eşit olacaktır. Halbuki puslu küme elemanlarının alacağı üyelik dereceleri o küme içerisindeki önemine göre $[0,1]$ aralığında herhangi bir değer olabilir⁵. Böylelikle puslu küme, onlar için “bir özelliğe sahip olma” ile “bir özelliğe sahip olmama” arasındaki sınırın keskin olmadığı kavramların tanımına imkan tanır⁶.

Klasik kümeler için “insan” terimi, tanımı itibariyle tek tek insanları kapsamaktadır ve bunların her birinin üyelik derecesi “1”dir. Bu küme bağlamında bir kuşun ya da bir çiçeğin üyelik derecesinin ise “0” olacağı açıktır. Puslu kümelerdeki durumu daha iyi ifade edebilmek için “sıcaklık” örneğini⁷ ele alalım. Sınırları -5°C ile $+35^{\circ}\text{C}$ arasında olan bir sıcaklık değer cetvelinde, -5°C altındaki sıcaklığı “çok soğuk”, -5°C ile 5°C aralığını “soğuk”, 5°C ile 18°C aralığını “ılık”, 18°C ile 30°C aralığını “sıcak” ve 30°C ’den fazlasını ise “çok sıcak” olarak nitelendirelim. Klasik kümeler için böyle bir cetvelde, -4°C ’nin “soğuk” kümesi için, 29°C ’nin ise “sıcak” kümesi için “1” değeri, tersi durumunda ise “0” değeri alacakları aşikardır. Ancak bu duruma puslu kümeler açısından baktığımızda -4°C ’nin, “soğuk” kümesinin bir elemanı olmakla birlikte aynı zamanda 5°C ’ye göre “çok soğuk” kümesine çok daha yakın olmak gibi bir özelliğe sahip olduğu da görülmektedir. Puslu küme teorisine göre -4°C , “soğuk” kümesi içerisinde olup “1” değerini alır; bununla birlikte belirttiğimiz özelliği itibariyle “çok soğuk” kümesi içerisinde de değerlendirilir. Bu değerlendirme onun “çok soğuk” kümesi için $[0,1]$ değer aralığında bir üyelik derecesi almasını sağlar. Böyle bir durumda “çok soğuk” kümesi için -9°C , “1” üyelik derecesi alacakken -4°C ’nin “0.75”, 5°C ’nin ise “0.05” gibi değerler alacağı düşünülebilir. Burada, çoğu durumda bir puslu kümenin üyelik derecesinin değerinin, Klasik kümelerdeki ait olma ve olmama durumları için de olduğu gibi subjektif bağlama bağlı bir değer olduğu unutulmamalıdır⁸.

⁵ Bkz.: A.e.

⁶ Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev, **Essential of Fuzzy Modeling and Control**, USA, John Wiley & Sons, Inc., 1994, s. 1.

⁷ Bkz.: Zekai Şen, **Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri**, İstanbul, Bilge Kültür Sanat, 2001, s. 29-32. Şen, İngilizce “fuzzy” teriminin Türkçedeki karşılığı olarak “bulanık” terimini kullanmıştır. Biz ise “puslu” terimini tercih ettiğimizden Şen’den yaptığımız alıntılarda (eğer bire bir alıntı değilse) “puslu” terimini kullanmaya devam edeceğiz.

⁸ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 4.

Zadeh söz konusu çalışmasında ortaya koyduğu üyelik fonksiyonunun, olasılık fonksiyonuna benzediğinin düşünülebileceğini ancak bu benzerliğin yüzeysel olduğunu ifade etmektedir. Ona göre:

“...bu kavramlar arasında, sonuçta üyelik fonksiyonlarının kombinasyon kuralları ve onların temel özellikleri bir kez saptanmış olduğunda açıkça ortaya çıkacak özsel farklılıklar vardır. Gerçekte bir puslu küme nosyonu tabiatı itibariyle bütünüyle istatistik dışıdır”⁹.

Bu temel savdan hareket ederek, pusluluğun, dolayısıyla onun esasını oluşturan puslu küme kavramının “üyelik fonksiyonlarının kombinasyon kuralları ve onların temel özellikleri”ni vererek istatistiksel ya da başka tür müphemliklerden farkını ortaya koyacak bir sistem oluşturmak, öncelikle bu kavramın mantık açısından ayrıntılı olarak incelenip tanımlanmasını gerektirmiştir. Bu alanda çalışan mantıkçılar puslu küme kavramına ilişkin tanım ve özelliklerin çoğunu, klasik kümelerin tanım ve özelliklerini pusluluk kavramına genişleterek elde etmişlerdir¹⁰. Ancak klasik kümelerle ilişkin tanım ve özelliklerin bir kısmının puslu kümelerde karşılığının bulunmadığı; puslu kümeler için belirlenmiş bazı tanım ve özelliklerin ise klasik kümeler için geçerli olamayacağı bilinmelidir. Yager ve Filev’e göre:

“Klasik küme tanımlarının genişletilmiş olan bu tanım ve işlemler 0 veya 1 üyelik derecesine sahip puslu kümelerle sınırlandırıldığında, genellikle onların klasik eşdeğerlerine (counterpart) indirgenirler. Üyelik, sadece $\{1, 0\}$ ’dan değil, $[1, 0]$ birim aralığından elde edildiğinden, bazı durumlarda klasik kümelerde olmayan tanımlar ve işlemler sağlayabiliriz. Bu yeni tanımlar klasik kümelerle uygulandıklarında genellikle bir anlam taşımayacaklardır”¹¹.

Bu açıklamalar uyarınca, öncelikle klasik ve puslu kümelerde ortak olarak kullanılan genel semboller ve tanımlar verilecek, daha sonra puslu kümelerle ilişkin tanım ve özellikler, gerektiğinde bu iki küme anlayışının benzerlik ve farklılıkları ortaya konularak aktarılacaktır.

⁹ Zadeh, **a.g.e.**, s. 21.

¹⁰ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 5.

¹¹ **A.e.**

2.1.1. Kümelere İlişkin Semboller¹²

$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ tüm tamsayılar kümesi.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ tüm pozitif tamsayılar ya da doğal sayılar kümesi.

$\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$ tüm negatif olmayan tamsayılar kümesi.

$\mathbb{N}_n=\{1,2,\dots,n\}$.

$\mathbb{N}_{0,n}=\{0,1,2,\dots,n\}$.

$\mathbb{R}$: tüm reel sayılar kümesi.

$\mathbb{R}^+$: tüm negatif olmayan reel sayılar kümesi.

$[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) : sırasıyla; kapalı, sol-açık, sağ-açık, a ve b arasında açık reel sayılar aralığı.

$(x_1, \dots, x_n)$: $x_1, \dots, x_n$ elemanlarının n 'li (n -tuple) dizisi.

Genel olarak büyük harflerle kümeler, küçük harflerle bu kümelerin üyeleri gösterilir. Bir büyük harf olan X , “**konuşma evreni**”ni yani “**evrensel küme**”yi göstermek için kullanılır. Bir x nesnesi bir A kümesinin üyesi olduğunda bu durum $x \in A$; eğer bir x nesnesi bir A kümesinin üyesi değilse bu durum $x \notin A$ şeklinde gösterilir. Öyleyse herhangi bir A kümesi (klasik ya da puslu) için $A \in X$ olmaktadır.

2.1.2. Küme Gösterim Yöntemleri¹³

Belirli bir X konuşma evreni içerisinde yer alan kümeler, üç temel yöntem ile tanımlanır:

2.1.2.1. Liste Yöntemi

Bu yöntem sadece sonlu kümeler için kullanılır. Üyeleri $1, 2, 3, \dots, n$ olan bir A kümesinin bu yöntemle gösterimi şu şekildedir:

$$A=\{1, 2, 3,\dots, n\}.$$

¹² Bkz.: George J. Klir, Bo Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, USA, Prentice Hall, 1995, s. 5

¹³ Bkz.: Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 6., Zadeh, **a.g.e.**, s. 20.

2.1.2.2. Kural Yöntemi

Bu yöntem, bir kümenin üyelerinin belirli bir özelliği taşıyıp taşımadıklarına bakılarak uygulanır. Eğer $K(x)$, “ x , K özelliğine sahiptir” şeklinde bir önermeyi ifade ediyorsa, $K(x)$ önermesini doğru kılan elemanların tümünü taşıyan bir A kümesi şu şekilde gösterilecektir:

$$A = \{x \mid K(x)\}.$$

2.1.2.3. Üyelik Fonksiyonu Yöntemi

Puslu kümelerin gösteriminde kullanılan yöntem, daha önce de değindiğimiz gibi karakteristik fonksiyon yönteminden türetilmiş olan ve onun gibi $f_A(x)$ ile gösterilen üyelik fonksiyonu yöntemidir. Klasik kümeler, üyeleri “1” ya da “0” üyelik derecesine sahip puslu kümeler olarak değerlendirilebildiğine göre¹⁴, (klasik ya da puslu) bütün kümeler için ilgili yöntem üyelik fonksiyonu yöntemi olarak ifade edilebilir. Klasik bir küme için $f_A(x)$ üyelik fonksiyonu, X konuşma evreni içerisindeki bir x elemanı için $x \in A$ olduğunda 1; $x \notin A$ olduğunda 0 değerini alır. Bu ilişki $f_A: X \rightarrow \{0,1\}$ şeklinde gösterilebilecek bir eşlemedir (mapping). Ancak puslu kümeler için ilgili eşleme klasik bir kümenin fonksiyon alanının (range) $\{0, 1\}$ ikili çiftinden $[0, 1]$ birim aralığına genişletilmesi suretiyle¹⁵ $f_A: X \rightarrow [0,1]$ ya da $A: X \rightarrow [0,1]$ şeklinde gösterilmektedir. Bu eşleme, her x için $f_A(x)$ gibi bir puslu küme üyelik fonksiyonunun, x 'in A kümesinin bir üyesi oluşuna ilişkin ($[0, 1]$ birim aralığında) bir “**derece**” (grade) belirttiğini vurgular¹⁶.

Üyelik fonksiyonları grafiklerle gösterilirler. Klasik kümelerin üyelik fonksiyonları sadece “**dikdörtgen biçimli**” (rectangular) olmaktadır¹⁷ puslu kümelerin üyelik fonksiyonları, üyelik derecelerinin dağılımına bağlı olarak “**üçgen biçimli**” (triangular), “**yamuk biçimli**” (trapezoidal) ya da “**çan eğrisi biçimli**” olabilmektedir¹⁸. Pratik uygulamalarda en fazla kullanılanlar üçgen biçimli

¹⁴ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 4.

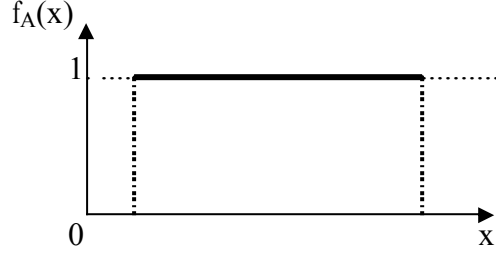
¹⁵ **A.e.**, s. 2.

¹⁶ **A.e.**

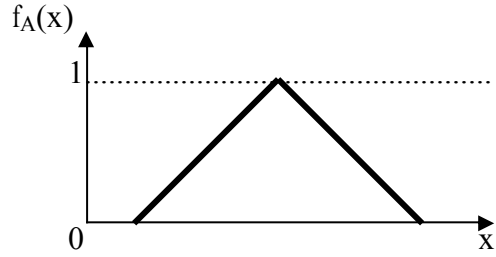
¹⁷ Şen, **a.g.e.**, s. 17.

¹⁸ **Bkz.: A.e.**, s. 18, 32., Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 2-3.

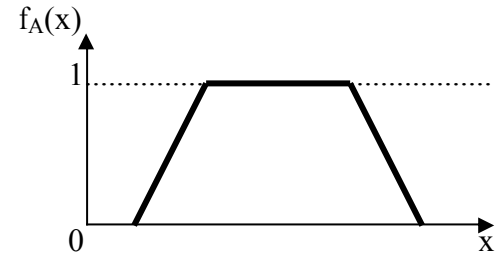
olanlardır¹⁹. Aşağıda, Grafik 1. ile klasik bir kümenin üyelik fonksiyonu gösterilirken; Grafik 2., Grafik 3. ve Grafik 4.'de puslu kümelerin yukarıda sıraladığımız üyelik fonksiyonları gösterilmektedir:



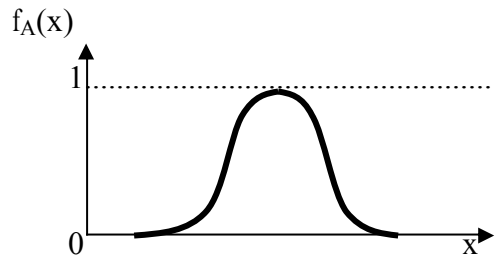
Grafik 1. Klasik Bir Kümenin Üyelik Fonksiyonu



Grafik 2. Üçgen Biçimli Üyelik Fonksiyonu



Grafik 3. Yamuk Biçimli Üyelik Fonksiyonu



Grafik 4. Çan Eğrisi Biçimli Üyelik Fonksiyonu

¹⁹ Şen, a.g.e., s. 32.

Herhangi bir küme, üyelik fonksiyonu cinsinden ifade edilebileceği gibi, liste yöntemine benzer şekilde, elemanlarının üyelik dereceleriyle birlikte gösterilmesi suretiyle de ifade edilebilir. X 'in $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 'e ve klasik bir küme olan A 'nın $\{x_1, x_4\}$ 'e eşit olduğu varsayılırsa, bu küme $A=\{1/x_1, 0/x_2, 0/x_3, 1/x_4\}$ şeklinde gösterilebilir. $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ iken $B=\{0.5/x_1, 1/x_2, 0/x_3\}$ gibi bir ifadenin ise X üzerindeki bir B puslu kümesini gösterdiği anlaşılmaktadır. Bu kümelerin gösterimlerdeki a/x biçimindeki ifadeler, her iki tür kümede de x elemanının ilgili küme içerisindeki durumunu belirtir. a 'daki değer A gibi klasik kümelerde x 'in o küme içerisinde bulunup bulunmadığını ifade ederken; B gibi puslu kümelerde x 'in o küme içerisinde bulunma yani üyelik derecesini belirtmektedir. Böyle bir gösterimde en büyük üyelik derecesi, ilişkili olduğu üyeyi B puslu kümesinin en kuvvetli üyesi yapmaktadır. Bazı durumlarda sıfır üyelik derecesine sahip terimler dikkate alınmaz. Buna göre yukarıdaki gösterim $B=\{0.5/x_1, 1/x_2\}$ şeklinde de olabilir.

2.2. Puslu Kümelere İlişkin Bazı Tanım ve Özellikler²⁰

2.2.1. Öz Puslu Küme

Daha önce de değindiğimiz üzere klasik kümeler, puslu kümelerin, üyelik derecesi olarak sadece 0 ve 1'i kabul eden özel bir durumudur. Buna göre üyelik derecesi 0 ya da 1 olmayan en az bir elemana sahip olan puslu küme “**öz (proper) puslu küme**” olarak tanımlanmaktadır²¹.

2.2.2. Boş Küme

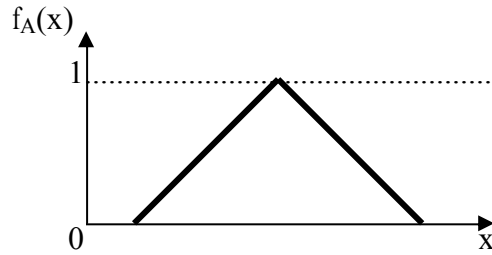
Klasik kümeler için üyesi olmayan bir küme “**boş küme**” (empty set) olarak adlandırılır ve “ $\emptyset$ ” ile gösterilir. Her $x \in X$ için $f_A(x)=0$ oluyorsa A 'ya “**puslu bir boş küme**” denir.

²⁰ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 33-36., Yager, Filev, a.g.e., s. 5-6., Klir, Yuan, a.g.e., s. 21.

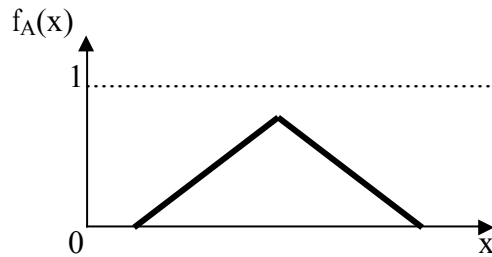
²¹ Yager, Filev, a.g.e., s. 4.

2.2.3. Normal ve Normal-altı Küme

X üzerindeki puslu bir A kümesi, $f_A(x)=1$ 'i gerçekleyen en az bir $x \in X$ elemanına sahipse “**normal**” olarak adlandırılır. A puslu kümesi normal değilse “**normal-altı**” (subnormal) ²² adını alır. Buna göre boş küme hariç bütün klasik kümeler normaldir. Puslu bir küme ile işlem yapılabilmesi için, onun normal olması yani en az bir elemanın “1” üyelik derecesine sahip olması zorunludur²³. Bu zorunluluk sebebiyle puslu küme teorisinde “**boşluk**” (nullness) kavramı “**normal-altı oluş**”a (subnormality) genellenmektedir²⁴. Sırasıyla normal ve normal-altı puslu kümeleri şu şekilde gösterilebilirler²⁵:



Grafik 5. Normal Bir Puslu Küme



Grafik 6. Normal-altı Bir Puslu Küme

2.2.4. Dışbükeylik

Herhangi bir puslu kümenin bir mantık çalışmasında kullanılabilmesinin temel şartlarından biri normal olmasıyken diğer bir şart “**dışbükey**” (convex)

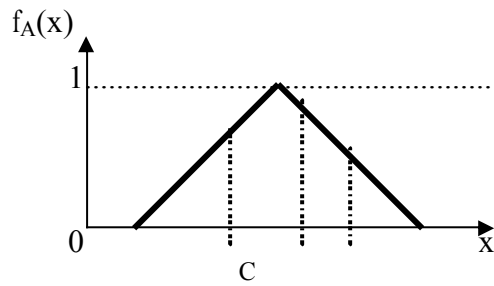
²² Bu terim türkçeye “normal-altı” yerine “normal olmayan” olarak da çevrilebilir. (Bkz.: Şen, a.g.e., s. 34.)

²³ Şen, a.g.e., s. 17.

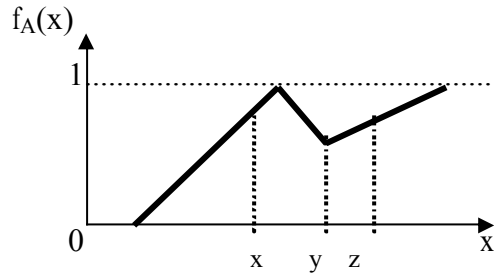
²⁴ Yager, Filev, a.g.e., s. 5.

²⁵ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 34.

olmasıdır. Burada “**dışbükeylik**”ten (convexity) kastedilen şey, (örnek olarak üçgen biçimli puslu kümeler için olduğu şekliyle) ilgili kümenin üyelik fonksiyonunun, dayanak üzerinde üyelik derecesi 1’e eşit oluncaya kadar sürekli artması ve 1’den sonra sürekli azalmasıdır²⁶. Dikkat edilirse daha önce grafiklerle göstermiş olduğumuz üyelik fonksiyonlarının tamamı (üçgen, yamuk ya da çan eğrisi biçimli) bu şartı sağlamaktadırlar. Aşağıdaki grafikler dışbükey olan ve olmayan puslu kümelere birer örnek niteliğindedirler²⁷:



Grafik 7. Dışbükey Bir Puslu Küme



Grafik 8. Dışbükey Olmayan Bir Puslu Küme

Bu grafiklerde gösterildiği şekliyle, bir üyelik fonksiyonu üzerinde x, y, z sırasıyla yer alan üç eleman arasında, ilgili sıraya göre ortada bulunan y elemanı için her durumda

$$f_A(y) \geq \text{Min}[f_A(x), f_A(z)]$$

²⁶ Şen, a.g.e., s. 34., 36.

²⁷ Şen, a.g.e., s. 35.

tanımı geçerli ise, yani y 'nin üyelik derecesi x ve z 'nin üyelik derecelerinin en küçüğünden küçük değilse söz konusu üyelik fonksiyonu “**dışbükey**”dir denir²⁸

2.2.5. Puslu Bir Kümenin Yüksekliği

X üzerindeki puslu bir A kümesinin elemanları içinde en büyük üyelik derecesine sahip olan elemanın üyelik derecesine A 'nın “**yüksekliği**” (height) denir. Bu “Yükseklik(A)” şeklinde ifade edilir.

$$\text{Yükseklik}(A) = \text{Max}_x f_A(x)$$

Buna göre normal bir puslu küme aynı zamanda yüksekliği 1'e eşit olan bir kümedir.

Puslu kümelerin diğer özelliklerine geçmeden önce Buckley ve Eslami'nin yükseklik özelliğine ilişkin görüşlerine değinmek yerinde olacaktır. Buckley ve Eslami'ye göre herhangi bir puslu kümenin yüksekliğinin belirlenmesinde sup (supremum) nosyonundan yararlanılmalıdır:

“ S kümesinin $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 'e eşit olduğunu ya da $[0, 1]$ aralığında yer aldığını düşünelim. Bu küme $\text{max}S=1$ şeklinde yazacağımız 1'e eşit olan bir maksimum x üyesine sahiptir. Şimdi $S' = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ gibi hiçbir maksimum üyeye sahip olmayan dolayısıyla onun için $\text{max}S'$ değeri bulunmayan bir küme düşünelim. Böyle bir durumda $\text{sup}S'=1$ şeklinde “sup”u (supremum) kullanacağız. S' 'in en düşük üst sınırı $\text{sup}S'$ olarak adlandırılır. Bir u sayısı, eğer S' 'deki bütün x 'ler için $x \leq u$ ise S' için bir üst sınır olarak adlandırılır ve $\text{sup}S'$ en küçük üst sınır olur. R 'nin bir üst sınıra sahip herhangi bir altkümesi bir supremuma sahiptir. Öyleyse “sup” “max”dan daha geneldir ve $\text{sup}S = \text{max}S = 1$. Genel olarak bir küme için “sup” o küme bir maximum değere sahip olabilirken bile kullanılır”²⁹.

Yukarıdaki açıklama uyarınca bir A puslu kümesinin yüksekliği Buckley ve Eslami tarafından şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\text{Yükseklik}(A) = \text{Sup}_x f_A(x)$$

²⁸ A.e.

²⁹ James J. Buckley, Esfandiar Eslami, **An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets**, Germany, Physica-Verlag, 2002, s. 23-24.

2.2.6. Puslu Kümelerde Üyelik Fonksiyonunun Kısımları

2.2.6.1. Puslu Bir Kümenin Dayanağı

“Dayanak(A)” şeklinde ifade edebileceğimiz A’nın “**dayanağı**” (support), X’in, A’da üyelik dereceleri 0’a eşit olmayan (nonzero) tüm elemanlarına sahip bir kümedir.

$$\text{Dayanak}(A)=\{x \mid f_A(x)>0 \text{ ve } x \in X\}.$$

2.2.6.2. Puslu Bir Kümenin Özü

“Öz(A)” şeklinde gösterilen A’nın “**özü**” (core), X’in, A’da üyelik derecesi 1 olan tüm elemanlarına sahip olan klasik bir kümedir.

$$\text{Öz}(A)=\{x \mid f_A(x)=1 \text{ ve } x \in X\}$$

Yukarıdaki son iki tanımı göz önünde tuttuğumuzda normal-altı bir puslu kümenin boş bir öze, normal puslu bir kümenin ise boş olmayan bir öze sahip olduğu anlaşılabacaktır.

2.2.6.3. Puslu Bir Kümenin Sınırları

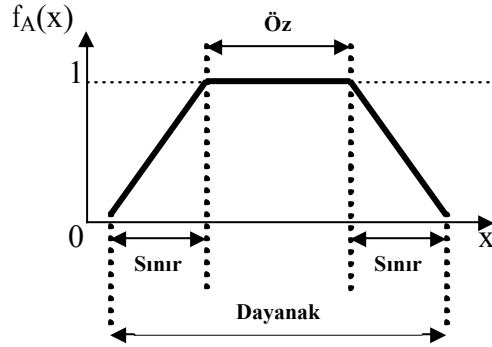
X’in, A’da üyelik dereceleri 1’e ya da 0’a eşit olmayan tüm elemanlarını içeren kümeler puslu kümenin “**sınırları**” (boundaries) ya da “**geçiş bölgeleri**” olarak adlandırılırlar³⁰. Çoğunlukla bir üyelik fonksiyonunun özünün sağında ve solunda yer alan bu sınırlar bir kümenin pusluluğunun temel sebebidirler³¹. Buna göre yukarıda tanımını vermiş olduğumuz öz puslu küme için, sınırları olan bir küme de denebilir. Sınır kümelerinde yer alan tüm elemanlar göz önüne alındığında

$$\text{Sınır}(A)=\{x \mid 0 < f_A(x) < 1 \text{ ve } x \in X\}$$

³⁰ Şen, a.g.e., s. 33.

³¹ A.e., s. 34.

olmaktadır³². Puslu kümelerin üyelik fonksiyon kısımlarını yamuk biçimli bir üyelik fonksiyonu grafiği üzerinde şu şekilde göstermek mümkündür³³:



Grafik 9. Üyelik Fonksiyonu Kısımları

Yukarıdaki tanımları örneklerle açıklamak gerekirse X 'in “a, b, c, d” elemanlarından oluştuğunu; X üzerinde, $A=\{0.2/a, 0.1/b, 0/c, 0.8/d\}$ şeklinde gösterilebilecek bir puslu kümenin olduğunu düşünelim. A , üyelik derecesi 1 olan hiçbir elemanı olmadığından normal-altı bir puslu kümedir. Taşıdığı elemanların sahip olduğu en yüksek üyelik derecesi 0.8 olduğundan $\text{Yükseklik}(A)=0.8$; üyelik dereceleri sıfırdan büyük elemanları “a, b ve d” olduğu için $\text{Dayanak}(A)=\{a, b, d\}$; üyelik derecesi 1 olan hiçbir elemanı bulunmadığından, bir başka deyişle yüksekliği 1'den küçük olduğundan $\text{Öz}(A)=\emptyset$ ve son olarak $\text{Sınır}(A)=\{a, b, d\}$ 'dir. $B=\{0.4/a, 1/b, 0.7/c, 0.5/d\}$ gibi bir puslu küme ise, “b” elemanı 1 üyelik derecesine sahip olduğundan normal bir puslu kümedir. Bu nedenle de $\text{Yükseklik}(B)=1$ olmaktadır. Bütün elemanları 0'dan büyük olduğu için $\text{Dayanak}(B)=\{a, b, c, d\}$; sadece “b” elemanı 1 üyelik derecesine sahip olduğundan $\text{Öz}(B)=\{b\}$ ve $\text{Sınır}(B)=\{a, c, d\}$ olmaktadır³⁴.

³² $\text{Sınır}(A)$ kümesinin tek bir sınır kümesini değil, iki sınır kümesinin **birleşimini** (Bkz.: metin içerisinde **2.4.3. Birleşim ve Kesişim**) ifade ettiğine dikkat edilmelidir.

³³ Şen, a.g.e., s. 34.

³⁴ Dikkat edilirse, dayanak kümesi, öz ve sınır kümelerinin **birleşim** kümesi durumundadır.

2.3. Sözel Değişkenler ve Sözel Eşikler

Bildirişmek için kullanılan doğal dillerin belirsiz sözcükler içermesi, bu dillerde üretilen ifadelerde tümüyle kesinlik sağlanmasına imkan vermemektedir. Gündelik bir dilde bir bilginin tam ve doğru bir biçimde ifade edilebilmesi ve anlaşılabilmesi, gerek gündelik ilişkiler gerekse bilimsel ve teknik çalışmalar açısından ciddi bir sorundur. Şüphesiz aynı sorun doğal dilleri esas alan yapay diller için de geçerlidir. Yapay zeka çalışmalarındaki en büyük sıkıntılardan birisi, bir yapay zekanın belirsizce ifade edilmiş bir bilgiyi anlamasını ve bunu insan zekasına benzer bir şekilde yorumlayarak anlamlı bir cevap vermesini sağlayacak bir yöntemin geliştirilmesi konusunda yaşanmaktadır. “**Sözel değişkenler**” (linguistic variables) ve “**sözel eşikler**” (linguistic hedge), puslu mantığın, bu sıkıntının görece olarak aşılmasını sağlayıcı bir yönteminin temel unsurları olarak karşımıza çıkmaktadırlar. Zadeh’in ifadesiyle:

“Sözel bir değişken adından da anlaşılacağı gibi değerleri doğal ya da yapay bir dildeki sözcükler ya da cümleler olan bir değişkendir. Örnek olarak eğer *yükseklik* değişkeni sözel bir değişken olarak ele alınırsa onun değerleri *uzun, uzun değil, oldukça uzun, çok uzun, çok uzun değil, çok çok uzun, uzun fakat çok uzun değil, epey uzun, aşağı yukarı uzun* olarak ifade edilebilirler. Böylece söz konusu değerler, *uzun* nitelendirici ismi, *değil* değillemesi, *ve* ve *fakat* bağlaçları ve *çok, oldukça, tamamıyla* ve *aşağı yukarı* eşiklerinden oluşturulmuş cümleler olmaktadır”³⁵.

Her bir sözel değişkenin nitelendirici ismi³⁶ puslu bir kümeyle ifade edilir. Bu puslu küme üzerinden, nitelendirici isme eklenen bağlaçlar ve/veya eşikler ile nispeten daha puslu ya da daha duru puslu kümeler elde edilebilir³⁷. Böylelikle, sözel değerler içeren bir bilginin aktarımı ve değerlendirilmesi konusunda hakimiyet artmaktadır.

Şen’in verdiği örneği kullanacak olursak³⁸ “kırmızı”, belirli bir frekans aralığına sahip bir renktir ancak bu aralıktaki sadece belirli bir alan ya da bir nokta gerçek kırmızı olarak ifade edilebilir; geri kalan alan ise kırmızının tonlarını ihtiva eder. Kırmızı renkli nesneleri içeren bir puslu kümenin elemanları kendi aralarında

³⁵ Lotfi A. Zadeh, “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, **Int. J. General Systems**, Gordon and Breach Science Publishers S.A.,UK, vol.17, 1990, s. 102-103.

³⁶ Şen bunlara kelime atomları demektedir. (Bkz.: a.g.e., s.132.)

³⁷ Şen, a.g.e., s. 132.

³⁸ A.e., s. 133.

“daha”, “çok”, “az”, “biraz” vb. sözel eşiklerin kullanımıyla yeniden tanımlandıklarında kırmızı kümesinin elemanlarında bir değişiklik olmamakla birlikte bu elemanların üyelik derecelerinde, birbirleriyle orantılı bir artma ya da azalma olur. İşte bu değişimler kırmızı nesnelere ait puslu küme hakkındaki bilginin daha belirgin ya da puslu olmasını sağlar. Dikkat edilirse “daha”, “çok” vb. eşikler “kırmızılık” konusunda bu kümeyi daha belirgin kılarken “az”, “biraz” vb. eşikler daha puslu hale getirmektedir.

Herhangi bir puslu bilginin, belirli bir amaç dahilinde daha belirgin olması istenebileceği gibi gereğinden fazla belirgin oluşu durumunda daha da puslu olması tercih edilebilir. Zadeh’in şu ifadeleri sözel değişken ve eşiklerin kullanımının temel gerekçesini açık bir şekilde ortaya koymaktadır:

“Sözel değişkenlerin kullanımının nedeni *minimum belirlilik prensibi* olarak adlandırılan şeydir. Bu prensibin altında yatan temel fikir kesinlik ve bu nedenle belirliliğin bir maliyetinin olduğu ve gereksiz yere kullanılmaması gerektiği fikridir. Örnek olarak eğer “Mary’nin yaşı nedir?” diye sorulduğunda, normalde *yirmi üç yıl, beş ay ve beş gün* şeklinde cevaplanılmaz. Çünkü böyle bir belirlilik derecesi gerekli değildir. Genellikle, eğer bu terimlerin belirliliği amaç için yeterli olacaksa benim cevabım *genç* ya da *çok genç* olacaktır. O halde temel ilke zorunlu olandan daha fazla belirli olmamaktır. Bu minimum belirlilik prensibinin esasıdır.

Bu açıdan bakıldığında sözel bir değişken kavramının ardındaki temel fikir sözel değerlerin, sayısal değerlerden daha az belirli olsalar da çoğu örnekte mevcut amaç için yeterince belirli oluşlarıdır”³⁹.

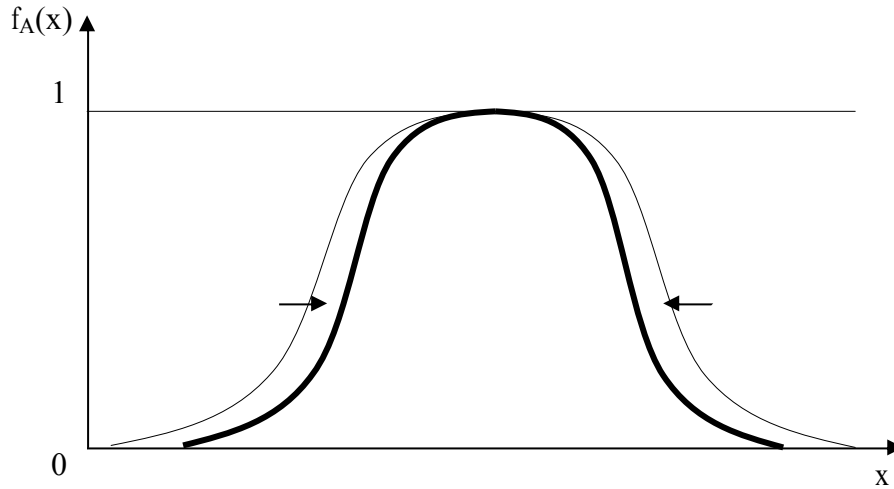
Bir puslu kümenin eşikler aracılığıyla belirginleştirilmesi ya da puslulaştırılması “**daraltma**” (concentration), “**genişletme**” (dilation) ve “**yoğunlaştırma**” (intensification) adı verilen işlemlerle gerçekleştirilir. Bu işlemlerin tanımları ve grafik üzerindeki gösterimleri sırasıyla şu şekildedir⁴⁰:

³⁹ Zadeh., “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, s. 103.

⁴⁰ Şen, a.g.e., s. 134-136., Lotfi A. Zadeh, “Calculus of Fuzzy Restrictions”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 220., Lotfi A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 403.

2.3.1. Daraltma

Daraltma işlemi, bir puslu kümenin elemanlarının üyelik derecelerinin tümünü aynı oranda düşürür. Örnek olarak “çok”, bir A puslu kümesini daraltan bir eşik olup Zadeh tarafından $CON(A)^{41}$ ile gösterilmiş ve bunun A^2 'ye eşit olduğu ifade edilmiştir. Bu eşdeğerlik, daraltma işlemi için A kümesindeki herhangi bir elemanın üyelik derecesinin karesinin alınmasını gerektirir. Buna göre örneğin 0.7 üyelik derecesine sahip bir elemanın daraltma işlemi sonunda ortaya çıkan yeni puslu kümedeki üyelik derecesi 0.49 olacaktır. Puslu bir A kümesi ve onun bütün elemanlarının üyelik derecelerinin karelerinin alınmasıyla ortaya çıkan yeni puslu küme grafik üzerinde şu şekilde gösterilir:



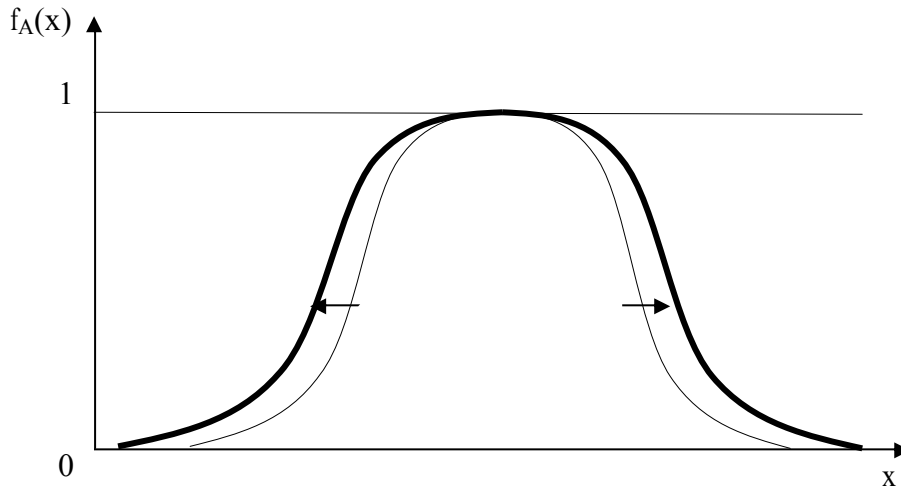
Grafik 10. Üyelik Fonksiyonunun Daraltılması

2.3.2. Genişletme

Genişletme işlemi, bir puslu kümenin elemanlarının üyelik derecelerinin tümünü aynı oranda arttırır. Örnek olarak “aşağı yukarı”, bir A puslu kümesini

⁴¹ CON, daraltmanın İngilizce'deki karşılığı olan “concentration”ın kısaltılmışıdır.

genişleten bir eşik olup Zadeh tarafından $DIL(A)^{42}$ ile gösterilmiş ve bunun $A^{0.5}$ 'e eşit olduğu ifade edilmiştir. Bu eşdeğerlik, genişletme işlemi için A kümesindeki herhangi bir elemanın üyelik derecesinin karekökünün alınmasını gerektirir. Buna göre örneğin 0.25 üyelik derecesine sahip bir elemanın genişletme işlemi sonunda ortaya çıkan yeni puslu kümedeki üyelik derecesi 0.5 olacaktır. Puslu bir A kümesi ve onun bütün elemanlarının üyelik derecelerinin kareköklerinin alınmasıyla ortaya çıkan yeni puslu küme grafik üzerinde şu şekilde gösterilir:



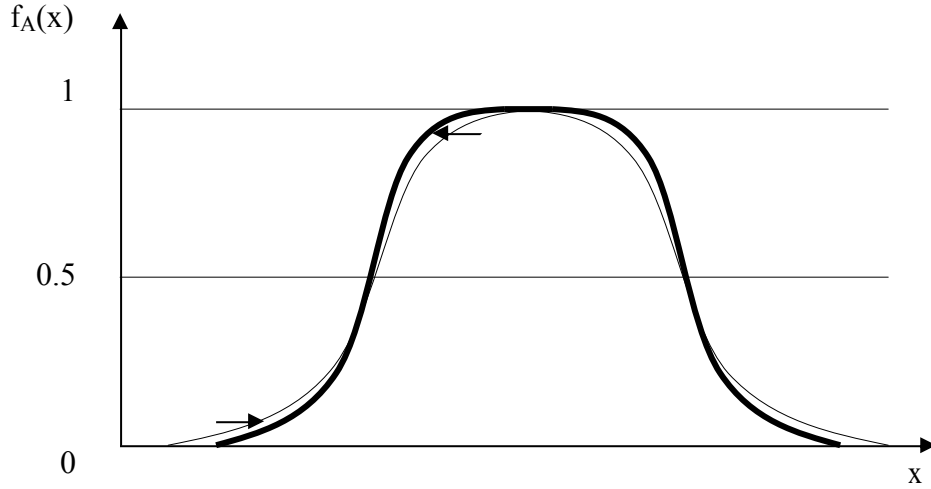
Grafik 11. yelik Fonksiyonunun Genişletilmesi

2.3.3. Yoğunlaştırma

Yoğunlaştırma işlemi genel olarak bir puslu kümenin, üyelik dereceleri 0.5'ten küçük olan elemanlarının üyelik derecelerini daraltarak azaltırken 0.5'den büyük olanlarınkini genişleterek arttırır. Bu işlem ilgili puslu kümenin elemanlarından bir kısmının diğer kısmına göre netliğinin (contrast) artmasını saęlar⁴³.

⁴² DIL, genişletmenin İngilizce'deki karşılığı olan “dilation”ın kısaltılmışıdır.

⁴³ şen, a.g.e., s. 135.



Grafik 12. Üyelik Fonksiyonunun Yoğunlaştırılması

Zadeh'e göre sözel eşikler iki kategoride düşünülmelidir: birinci tip eşikler tek bir küme üzerinde işlem yapmayı gerektiren “çok”, “epey”, “aşağı yukarı”, “azıcık” vb. eşiklerdir. İkinci tip eşikler ise “teknik olarak”, “esas olarak”, “pratik olarak” vb. daha karmaşık olan eşiklerdir ve bunlarla iş görmek için bileşenlerinin ne tarzda işlenmesi gerektiği konusunda bir tanıma ihtiyaç vardır. Genel olarak ikinci tip eşikler, birinci tip eşikleri içeren puslu bir algoritma olarak formüle edilir⁴⁴. Bileşenleri, ayrıştırılmış ya da “çok çok uzun” ya da “çok çirkin değil” gibi örneklerde olduğu gibi açıkça bilinen karmaşık eşikler, bu bileşenlerin belirli bir sıraya göre ele alınmalarıyla değerlendirilirler. Eğer sözel değer “değil” ile “ve”, “veya” gibi bağlaçlar da içeriyorsa o halde önce sözel eşik işlemleri sonra sırasıyla “ve” ve “veya” (kesişim ve birleşim) işlemleri yapılır⁴⁵.

⁴⁴ Lotfi A. Zadeh, “A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges”, **Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. R. R. Yager, S. Ovchinnikov, R. M. Tong, H. T. Nguyen, John Wiley & Sons, USA, 1987, s. 467, 496.

⁴⁵ Şen, **a.g.e.**, s. 137.

2.4. Puslu Kümeler Arasındaki Temel İlişki Biçimleri⁴⁶

Şimdiye kadar bazı tanım ve özelliklerini sıralamaya çalıştığımız puslu kümelerle bir takım işlemler yapılabilmesi, yani bir “**puslu kümeler cebiri**” (algebra of fuzzy sets) elde edilebilmesi, ilgili kümeler arasındaki ilişki biçimlerinin ortaya konulması ile mümkündür. Sözel değişken ve sözel eşiklerin etkin kullanımını da sağlayacak böyle bir cebir oluşturmak için gerekli temel ilişki biçimleri aşağıda sıralanmıştır.⁴⁷

2.4.1. Eşitlik, Altküme ve Üst küme

Puslu kümeler için gerek “**eşitlik**” (equality) gerekse “**altküme**” (subset) tanımı, klasik kümeler için olduğundan farksızdır. A ve B gibi iki puslu küme, X’deki tüm x’ler için

$$f_A(x)=f_B(x)$$

olması durumunda “**eşit**”tir ve bu durum, $A=B$ şeklinde gösterilir. Tersini yani “**eşitsizlik**” durumu ise $A \neq B$ olarak ifade edilir. Eğer her bir $x \in X$ için

$$f_B(x) \geq f_A(x)$$

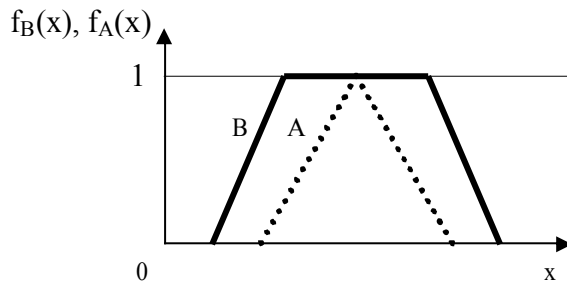
ise bu durumda A, B puslu kümesinin bir altkümesi olarak adlandırılır ve ilişki $A \subset B$ ya da $A \subseteq B$ ⁴⁸ olarak gösterilir. Altküme kavramının önermeler mantığındaki karşılığı “**içerim**” (containment) kavramıdır. Bu ilişki biçimi “**koşulluluk**” (conditional) olarak da adlandırılır ve “ $\rightarrow$ ” işaretiyle gösterilir. Eşitlik kavramı ise önermeler mantığında “**özdeşlik**” (identity) olarak karşımıza çıkar. Diğer adı “**çiftkoşulluluk**” (biconditional) olan bu ilişki ise “ $\leftrightarrow$ ” işaretiyle gösterilir. Adlarından da anlaşılacağı

⁴⁶ **Bkz.:** Buckley, Eslami **a.g.e.**, s. 17-30., Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 6-12., Zadeh, “Fuzzy Sets”, s. 21-23., Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 25-29.

⁴⁷ Bu bölümdeki tanımlarda, ilişki biçimlerinin en genel, kimi mantıkçıların tabiriyle “standart” gösterimleri kullanılacaktır.

⁴⁸ $A \subseteq B$ gibi bir gösterimin diğerinden farkı, herhangi bir kümenin aynı zamanda kendisinin de bir altkümesi olduğunu vurgulamasıdır. $A \subset B$ gibi bir gösterim A ve B’nin eşit olmadığı varsayımına dayanır ki bu durumda A kümesi, B kümesinin **özalt kümesi** (proper subset) olarak adlandırılır. (**Bkz.:** Buckley, Eslami, **a.g.e.**, s. 12.)

üzere eşitlik ile içerim kavramları birbirleriyle yakın ilişki içerisindeyler. Aslında mantıkta eşitlik ya da özdeşlik kavramıyla kastedilen şey, önermeler mantığı diliyle ifade edilecek olursa iki önermenin birbirini içermesi; kümeler açısından değerlendirilecek olursa iki kümenin birbirinin altkümeleri olmasıdır. Buna göre X üzerindeki A ve B gibi iki puslu küme, eğer hem $A \subseteq B$ hem de $B \subseteq A$ ise birbirine eşit olmaktadır. Aşağıda, yamuk biçimli bir B puslu kümenin altkümeleri durumundaki üçgen biçimli bir A puslu kümesinin grafikte gösterimi verilmiştir⁴⁹:



Grafik 13. İki Puslu Küme Arasındaki Altküme İlişkisi

Daha önce de değinildiği gibi ister klasik ister puslu olsun her küme X konuşma evreninin bir altkümeleri durumundadır. Buna göre puslu kümeler için her bir $x \in X$ için $\emptyset(x)=0$ olduğundan $\emptyset$ yani boş küme de X 'in bir altkümeleri. Dikkat edilmelidir ki X üzerindeki herhangi bir A puslu kümesi için $\emptyset \subseteq A$ olur. Bundan başka X , bütün $x \in X$ için, $X(x)=1$ durumundaki bir puslu küme olarak değerlendirilebileceğinden $A \subseteq X$ olmaktadır. Buna göre herhangi bir A puslu kümesi, boş küme ve konuşma evreni dikkate alındığında kısaca $\emptyset \subseteq A \subseteq X$ şeklinde ifade edilebilecek bir ilişki içerisinde bulunmaktadır.

Bütün kümeler X konuşma evreninin bir altkümeleri durumunda olduğuna göre, kümelerin X 'in altkümeleri olma bağlamında farklı bir küme oluşturdıkları açıktır. Bu küme X 'in “**üst kümesi**” (power set) olarak adlandırılır ve klasik kümeler için $P(X)$, puslu kümeler için $F(X)$ ⁵⁰ olarak gösterilir⁵¹. Tanımı uyarınca bütün kümeler için bir üst kümeden söz edilebilir. Buna göre $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ durumu için

⁴⁹ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 65.

⁵⁰ Buckley, Eslami, a.g.e., s. 24.

⁵¹ A.e., s. 21

A'nın X üzerindeki puslu bir küme olduğunu varsaydığımızda, A puslu kümesinin üstü $\text{Üst}(A)$ olarak gösterilir. Yager ve Filev'e göre:

“Klasik kümeler için üstün, kümelerin kardinallğine eşdeğer olduğuna dikkat edilmelidir. Genellikle bir puslu kümenin kardinallğı, bütünün elde edilmesi için parçaların eklenmesi hususunu içeren kompleks bir kavramdır. Ancak bazı durumlarda üst, kardinallğın bir ölçüsü olarak kullanılır. Böyle durumlarda o sigma-sayımı (sigma-count)⁵² olarak adlandırılır ve $\sum f_A(x)$ şeklinde gösterilir”⁵³.

Bu durumda bir A kümesinin üstü

$$\text{Üst}(A) = \sum_{i=1}^n f_A(x_i)$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.2. Tümleyen

Bir kümenin “**tümleyeni**” (complement), önermeler mantığında bir önermenin değıline karşılık gelir. Klasik ya da puslu bir küme için tümleyen, X konuşma evreni içinde o kümenin dışında kalan tüm elemanları içeren kümedir. Klasik kümeler için olduğu gibi puslu bir küme için de konuşma evreni 1 olduğuna göre, bir A puslu kümesinin tümleyeni, A' ile gösterilir ve $x \in X$ iken

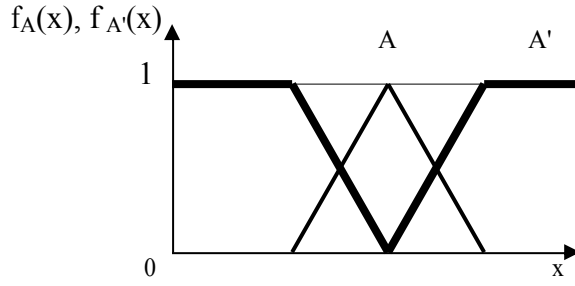
$$f_{A'}(x) = 1 - f_A(x)$$

olarak tanımlanır. Puslu bir kümenin tümleyenini elde etme işlemi tümleme olarak adlandırılabilir. Puslu bir küme ile onun tümleyeni grafikte şu şekilde gösterilir⁵⁴:

⁵² Klir ve Yuan bu işlem için sayısal (ölçütsel) kardinallik (scalar cardinality) tabirini kullanmaktadırlar. (Bkz.: Klir, Yuan, a.g.e., s. 28.)

⁵³ Yager, Filev, a.g.e., s. 7.

⁵⁴ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 67.



Grafik 14. Puslu Bir Küme ve Tümleyeni

Yukarıda vermiş olduğumuz tanım uyarınca $X=\{a, b, c, d\}$ iken, bu konuşma evreni üzerindeki A kümesi $\{0.7/a, 0.5/b, 0.6/c, 1/d\}$ 'ye eşit olduğunda A 'nın tümleyeni yani A' , $\{0.3/a, 0.5/b, 0.4/c, 0/d\}$ 'ye eşit olur.

Tümleme işlemi esas olarak tek bir kümeye ilişkindir. Ancak Yager ve Filev, iki puslu küme arasında, “**bağlı (relative) tümleyen**” olarak adlandırdıkları bir başka tümleyen ilişkisinden söz etmektedirler. Bu tanıma göre X üzerinde A ve B gibi herhangi iki puslu küme varsayıldığında, B , A 'ya göre bağlı bir tümleyene sahiptir. R ile göstereceğimiz bu küme $A-B$ 'ye eşittir ve fonksiyonel olarak $x \in X$ iken

$$f_R(x) = \text{Max}[0, f_A(x) - f_B(x)]$$

şeklinde ifade edilir⁵⁵. Bu işlem için $X=\{a, b, c, d\}$ konuşma evreni ile $A=\{0.7/a, 0.5/b, 0.6/c, 1/d\}$ ve $B=\{0.3/a, 0.5/b, 0.9/c, 0.4/d\}$ puslu kümelerini kullanacak olursak B 'nin A 'ya göre bağlı tümleyeni $R=A-B=\{0.4/a, 0/b, 0/c, 0.6/d\}$ olacaktır.

Tümleyen ilişkisine göre $\emptyset' = X$ ve $X' = \emptyset$ olmaktadır. Yani boş kümenin tümleyeni konuşma evreni; konuşma evreninin tümleyeni ise boş kümedir.

2.4.3. Birleşim ve Kesişim

Klasik iki kümenin “**birleşimi**” (union), önermeler mantığındaki iki önerme arasındaki alternatif ilişkiye (veya[$\vee$]-disjunction); “**kesişimi**” (intersection) ise birlikte evetleme ilişkisine (ve[$\wedge$]-conjunction) karşılık gelir. Diğer işlemlerde olduğu gibi puslu iki kümenin birleşimi ve kesişimi işlemleri de klasik kümelerdeki

⁵⁵ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 9.

ilgili işlemlerin genişletilmiş şeklidir. Ancak puslu kümelerin birleşimi ve kesişimi, elemanlarının taşıdığı üyelik dereceleri nedeniyle klasik kümelerin birleşimi ve kesişiminden, dolayısıyla önermeler mantığındaki bunlara mütakabil ilişkilerden biraz daha farklı değerlendirilmekte ve farklı bir işlemi gerekli kılmaktadırlar.

Üyelik fonksiyonları $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ olan A ve B gibi iki puslu kümenin birleşimi bir C puslu kümesidir ve bu durum $C=A \cup B$ olarak gösterilir. C'nin üyelik fonksiyonu, A'nın ve B'nin üyelik fonksiyonuna bağlıdır ve bu ilişki genel olarak $x \in X$ iken

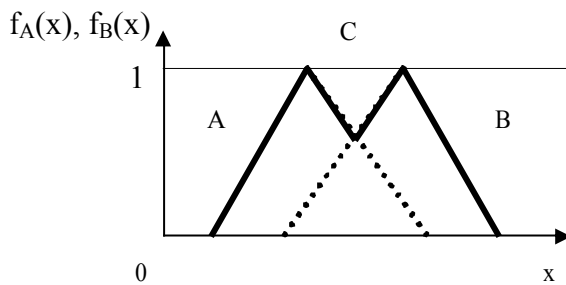
$$f_C(x) = \text{Max}[f_A(x), f_B(x)]$$

şeklinde tanımlanabilir.

Üyelik fonksiyonları $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ olan A ve B gibi iki puslu kümenin kesişimi bir D puslu kümesidir ve bu durum $D=A \cap B$ şeklinde ifade edilir. D'nin üyelik fonksiyonu, A'nın ve B'nin üyelik fonksiyonuna bağlıdır ve bu ilişki $x \in X$ için

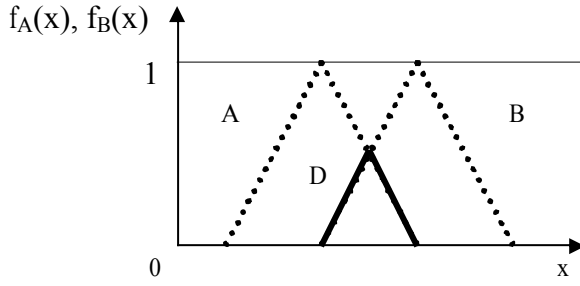
$$f_D(x) = \text{Min}[f_A(x), f_B(x)]$$

olarak gösterilebilir. Puslu kümelerin birleşimi ve kesişiminin grafikte gösterimleri sırasıyla şu şekildedir⁵⁶:



Grafik 15. İki Puslu Kümenin Birleşimi

⁵⁶ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 57., 60.



Grafik 16. İki Puslu Kümenin Kesişimi

Puslu kümelerin birleşim ve kesişim kümelerini tespit etmemizi sağlayan max ve min işlemlerinin klasik kümelerde de uygulanabildiğini göstermek için şu örneklerden yararlanabiliriz: $X=\{a, b, c, d\}$ iken, klasik kümeleri için A'nın $\{a, b, c\}$ 'ye ve B'nin $\{b, d\}$ 'ye eşit olduğunu düşünelim. Buna göre $A=\{1/a, 1/b, 1/c, 0/d\}$ ve $B=\{0/a, 1/b, 0/c, 1/d\}$ olmaktadır. Klasik işlemlere göre $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ ve $A \cap B = \{b\}$ olduğu açıktır. Yukarıda verilen fonksiyon işlemleri kullanılırsa

$$f_C(x) = \max[f_A(x), f_B(x)] \text{ gereğince } A \cup B = \{1/a, 1/b, 1/c, 1/d\}$$

$$f_D(x) = \min[f_A(x), f_B(x)] \text{ gereğince } A \cap B = \{0/a, 1/b, 0/c, 0/d\}$$

olduğu görülecektir. Bu sonuçlarda 0 değeri taşıyan elemanları kaldırdığımızda $A \cup B$ 'nin $\{a, b, c, d\}$ 'ye $A \cap B$ 'nin ise $\{b\}$ 'ye eşit olduğunu yani burada elde ettiğimiz sonuçların klasik işlemlerle tespit ettiğimiz sonuçlarla aynı olduğunu görebiliriz.

$A=\{0.7/a, 0.5/b, 0.6/c, 1/d\}$ ve $B=\{0.4/a, 0/b, 0.8/c, 0.3/d\}$ gibi iki puslu küme için, yukarıda klasik kümeler için geçerliliğini göstermiş olduğumuz ilgili fonksiyon işlemlerini kullandığımızda bu iki kümenin birleşimini gösteren C kümesi $\{0.7/a, 0.5/b, 0.8/c, 1/d\}$ 'ye; aynı kümeler için kesişimi gösteren D kümesi ise $\{0.4/a, 0/b, 0.6/c, 0.3/d\}$ 'ye eşit olmaktadır.

A ve B'nin birleşimi, A ve B'nin her ikisini de içeren en küçük puslu küme iken A ve B'nin kesişimi, A ve B'nin her ikisinde de içerilmiş olan en büyük puslu kümedir⁵⁷. Buna göre bu iki kümenin birleşim kümesi, hem A'yı hem B'yi hem de

⁵⁷ Zadeh, "Fuzzy Sets" s. 21-22.

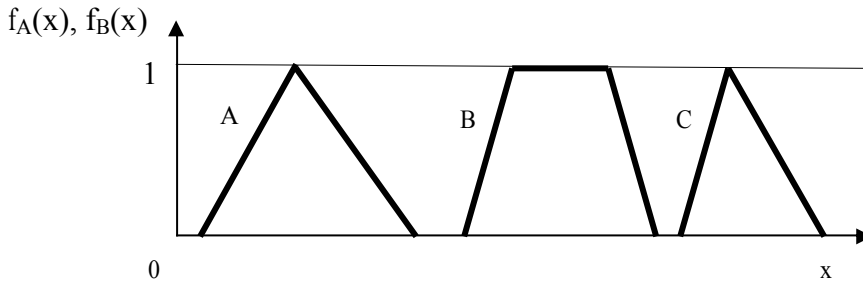
bu kümelerin kesişim kümesini içerir. Beraberinde kesişim kümesi A ve B tarafından da içeriilmektedir. Sözel olarak ifade edilmiş bu ilişkileri küme notasyonunu kullanarak bir teorem şeklinde gösterebiliriz:

•Her bir $x \in X$ için $f_D(x) = \min[f_A(x), f_B(x)]$ ve $f_C(x) = \max[f_A(x), f_B(x)]$ ise $f_C(x) \geq f_D(x)$ 'dir ve bu nedenle $D \subseteq C$ 'dir.

• $f_C(x) = \max[f_A(x), f_B(x)]$ ise $f_C(x) \geq f_A(x)$ ve $f_C(x) \geq f_B(x)$ 'dir ve bu nedenle $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$ 'dir.

• $f_D(x) = \min[f_A(x), f_B(x)]$ ise $f_D(x) \leq f_A(x)$ ve $f_D(x) \leq f_B(x)$ 'dir ve bu nedenle $D \subseteq A$ ve $D \subseteq B$ 'dir⁵⁸.

Eğer A ve B'nin kesişimi boş küme yani $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B “**ayrık**”⁵⁹tır (disjoint) denir. Aşağıdaki grafikte ayrık üç puslu küme gösterilmektedir⁶⁰:



Grafik 17. Ayrık Puslu Kümeler

⁵⁸ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 8.

⁵⁹ Şen “ayrık” yerine “bağdaşamayan” terimini kullanmaktadır. (**Bkz.:** Şen, **a.g.e.**, s. 62.)

⁶⁰ **Bkz.:** Şen, **a.g.e.**, s. 62.

3. Puslu Kümeler Cebiri

3.1. t-bir.normu¹, t-normu ve Tümlleme İşlemleri²

Birleşim ve kesişimin klasik kümelerden puslu kümelere genişletilmesinde kullanılan Max ve Min işlemleri, bu iş için Yager ve Filev'in tabiriyle “gerçekten çok özel seçimlerdir ve sıklıkla kullanılırlar”³. Ancak bu durum, ilgili işlemlerin alternatifi olmadığı anlamına gelmez. A ve B'nin X üzerindeki iki puslu küme olduğunu varsayalım ve Max ve Min işlemlerine alternatif olarak ortaya konan iki farklı işlemi inceleyelim. $A \cup B$ kümesini ifade eden $f_C(x)$, Max'dan farklı olarak $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$ şeklinde; $A \cap B$ kümesini ifade eden $f_D(x)$ ise Min'den farklı olarak $f_A(x)f_B(x)$ şeklinde tanımlanabilmektedir. Bu işlemlerin de geçerliliği kolaylıkla denetlenebilir. Daha önce kullanmış olduğumuz örnekte, klasik kümeler için $X = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{b, d\}$; dolayısıyla $A = \{1/a, 1/b, 1/c, 0/d\}$ ve $B = \{0/a, 1/b, 0/c, 1/d\}$ olduğunda, klasik işlemlere göre $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{b\}$ olmaktadır. Bu örnek kümeler için biraz önce ifade ettiğimiz yeni işlemler kullanılırsa Max ve Min işlemleriyle elde edilmiş olan sonuçlardan farksız sonuçlar elde edilmektedir:

¹ “t-bir.normu” (t-conorm) ve “t-normu” (t-norm) terimlerindeki “t” ön eki, “triangular” teriminin kısaltılmışıdır. (Bkz.: Didier Dubois, Walenty Ostasiewicz, Henri Prade, “Part I Fuzzy Sets: History and Basic Notions”, **Fundamentals of Fuzzy Sets**, Ed. Didier Dubois, Henri Prade, USA, Kluwer Academic Publishers, 2000, s. 41.) Bu terim ilgili normların “üçgen biçimli” yani standart puslu kümelere ilişkin olduğunu ifade etmektedir.

² Bkz.: Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev, **Essential of Fuzzy Modeling and Control**, USA, John Wiley & Sons, Inc., 1994, s. 8-11., s. 29-37., James J. Buckley, Esfandiar Eslami, **An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets**, Germany, Physica-Verlag, 2002, s. 22-23., s. 31-35., George J. Klir, Bo Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, USA, Prentice Hall, 1995, s. 8., s. 61-83., Lotfi A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 23-24.

³ Yager, Filev, a.g.e., p. 30.

$$f_C(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x) \text{ gereğince } A \cup B = \{1/a, 1/b, 1/c, 1/d\}$$

$$f_D(x)=f_A(x)f_B(x) \text{ gereğince } A \cap B = \{0/a, 1/b, 0/c, 0/d\}$$

Bu işlemleri $A=\{0.7/a, 0.5/b, 0.6/c, 1/d\}$ ve $B=\{0.4/a, 0/b, 0.8/c, 0.3/d\}$ puslu kümelerine uyguladığımızda ise, Max ve Min ile elde edilen $C=\{0.7/a, 0.5/b, 0.8/c, 1/d\}$ ve $D=\{0.4/a, 0/b, 0.6/c, 0.3/d\}$ kümelerine oldukça yakın değerlere sahip $C=\{0.82/a, 0.5/b, 0.92/c, 1/d\}$ ve $D=\{0.28/a, 0/b, 0.48/c, 0.3/d\}$ kümeleri sağlanmaktadır.

Yager ve Filev'e göre:

“Üyelik gibi, ikili (binary) küme esasından ayrılış, birleşim ve kesişim işleminin uygulanması için oldukça fazla sayıda seçim imkanı sağlar. Puslu küme teorisi içerisinde ilginç ve etkin bir alan puslu kümelerin birleşimi ve kesişiminin belirlenmesi problemidir. Belirli bir durumda kullanmak için uygun puslu birleşim-kesişim işlemlerinin seçimine ilişkin değerlendirme (consideration), bu seçime yardım edecek birkaç kriter sağlamalıdır. Bu işlemlerin formunun seçimi için ilk değerlendirme onda puslu yapıyı matematiksel bir model olarak kullanacağımız alanı vermelidir. Bazen tikel formel özellikleri elde etme isteği de bir (tür) değerlendirmedir. Özelliklerin ölçümü ile ilgili konular (değerlendirmede) yer almak zorundadır ki bu, üyelik dereceleri için kullanılan ölçüt ile yakından ilişkilidir”⁴.

Bu açıklamadan da anlaşılacağı üzere, örneklediğimiz işlemler dışında, birleşim ve kesişim ilişkilerinin belirlenmesi için kullanılabilecek başka işlemler de vardır ve bu işlemlerin geçerliliği her şeyden önce, sonucun doğruluğunu garanti edici bazı özelliklere sahip olmalarına bağlıdır⁵.

Bu işlemlerin belirlenmesi için yapılacak bir değerlendirmede A ve B gibi X üzerinde tanımlanmış iki puslu kümenin, $A \cup B$ şeklinde ifade edilen birleşiminin X üzerinde bir C kümesine; $A \cap B$ şeklinde ifade edilen kesişiminin ise X üzerindeki bir D puslu kümesine eşit olduğu varsayılır. Bu işlemler için birer tanım elde edilebilmesi, birkaç faktörün göz önünde tutulmasıyla mümkün olabilir. Öncelikle dikkat edilmesi gereken şey bu işlemlerin “**noktasal**” (pointwise) biçimde tanımlanmasıdır. Burada noktasal biçimli bir tanımlamadan kastedilen, $f_C(x)$ veya

⁴ A.e. s. 30-31.

⁵ Klir, Yuan, a.g.e., s. 62.

$f_D(x)$ 'in sadece $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ 'e bağlı olmasıdır. Bu varsayım, birleşim için $f_C(x)=M(f_A(x), f_B(x))$; kesişim için $f_D(x)=K(f_A(x), f_B(x))$ şeklinde formülleştirilebilir⁶ ve böylelikle birleşim veya kesişimi ifade eden işlemlerin formel yapıları tespit edilmiş olur.

Bundan sonraki adım, bu işlemlerin taşınması gereken bazı şartları belirlemek olmalıdır. Bilindiği gibi her iki işlem için de bileşenlerin ve işlem sonuçlarının $[0, 1]$ birim aralığında bulunması zorunludur. Beraberinde, puslu işlemler klasik işlemleri içerdiğine göre, herhangi bir puslu işlemin onun klasik muadilini de gerçeklemesi gerekmektedir. Bu iki durumun ortaya koyduğu şartlar şu şekilde sıralanabilir⁷:

Puslu bir birleşim işlemi için

- 1) $0 \leq f_A(x), f_B(x) \leq 1$ ve $0 \leq M(f_A(x), f_B(x)) \leq 1$
- 2) $M(1, 1)=M(0, 1)=M(1, 0)=1$
- 3) $M(0, 0)=0$

Puslu bir kesişim işlemi için

- 1) $0 \leq f_A(x), f_B(x) \leq 1$ ve $0 \leq K(f_A(x), f_B(x)) \leq 1$
- 2) $K(0, 1)=K(1, 0)=K(0, 0)=0$
- 3) $K(1, 1)=1$

M ve K işlemlerinin her ikisi için de 1. şart, puslu mantığın esasına ilişkindir. 2. ve 3. şartlar ise, bu işlemler klasik kümelerdeki muadillerinin sahip olduğu bazı işlem özelliklerine sahip olduğu takdirde gerçekleştirilebilecek şartlardır. O halde öncelikle klasik kümelerdeki birleşim ve kesişim işlemlerinin temel özelliklerinin neler olduğuna bakmak yerinde olacaktır:

⁶ Bu formüllerde kesişimi ifade etmesi için bu terimin ilk harfi yani K kullanılmışsa da, birleşimi ifade edebilecek B harfi ilgili formüllerde bir başka kümenin gösterimi için kullanıldığından, karışıklık olmaması için birleşimin gösteriminde bu terimin son harfini yani M'yi kullanıyoruz.

⁷ **Bkz.:** Buckley, Eslami, **a.g.e.**, s. 24-25.

1) Çift Tümleme⁸:

$$(A')' = A.$$

2) Yer değiştiricilik (Commutativity):

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

3) Birleşirlik (Associativity):

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

4) Dağıtıcılık (Distributivity):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5) Denk güçlölük (Idempotency):

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

6) Çelişmezlik Kanunu (Law of Contradiction):

$$A \cap A' = \emptyset.$$

⁸ Buckley, Eslami, Klir ve Yuan bu özellik için karışıklık (involution) tabirini kullanırken biz Yager ve Filev gibi çift değilleme (double negation) tabirini uygun buluyoruz. Ancak değillemenin küme işlemlerindeki karşılığı tümleme olduğu için bu özelliği “**çift tümleme**” olarak adlandırıyoruz.

7) Üçüncü Halin İmkansızlığı Kanunu (Law of Excluded Middle):

$$A \cup A' = X.$$

8) De Morgan Kanunları:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

9) Özdeşlik (Identity):

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cup X = X, A \cap X = A.$$

10) Emilim (Absorbition):

$$A \cup (A \cap B) = A,$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Tümü klasik kümeler tarafından gerçekleştirilmekte olan bu özelliklerden, puslu kümelerin birleşim ve kesişim işlemleri tarafından içerilmesi zorunlu olan ilk özellik o işlem için bir sabit (fixed) özdeşlik kümesinin var olmasıdır⁹. “Sınır şartı” (boundary condition)¹⁰ olarak da adlandırılan özdeşlik özelliği, hem birleşim hem de kesişim işlemlerinin taşıması gereken bir özelliktir. Ancak birleşim ve kesişimin özdeşlik özellikleri birbirinden farklıdır. Birleşim için özdeşlik boş küme yani $\emptyset$ iken kesişim için özdeşlik tüm konuşma evreni yani X olmaktadır. İlgili işlemlerde $\emptyset$ “0” ile, X ise “1” ile ifade edildiğine göre, özdeşlik özelliği

$$M(f_A(x), 0) = f_A(x)$$

$$K(f_A(x), 1) = f_A(x)$$

⁹ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 32.

¹⁰ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 62, s. 77.

şeklinde gösterilebilir. Buna göre birleşim özdeşliğine “**Sıfır (0) özdeşliği**”, kesişim özdeşliğine ise “**Bir (1) özdeşliği**” denebilir¹¹. Sıfır (0) özdeşliği, birleşimin formülleştirilmesindeki en etkili argümanın en büyük argüman olduğunu, bir (1) özdeşliği ise kesişimin formülleştirilmesindeki en etkili argümanın en küçük argüman olduğunu ifade eder¹². Bu özellik $M(1, 0)=1$, $M(0, 0)=0$ ve $K(1, 1)=1$, $K(0, 1)=0$ şartlarını sağlamaktadır.

Bu işlemler için ihtiyaç duyulan ikinci bir özellik, bir altküme ilişkisi olduğundan yukarıda sıraladığımız özellikler arasında yer almayan “**monotonluk**”tur (monotonicity). $f_B(x) \subseteq f_C(x)$ olduğunu varsaydığımızda monotonluk özelliği

$$M(f_A(x), f_B(x)) \subseteq M(f_A(x), f_C(x))$$

$$K(f_A(x), f_B(x)) \subseteq K(f_A(x), f_C(x))$$

ilişkilerini zorunlu kılar. Bu özellik gereği $0 \leq 1$ durumu $M(1, 0)=1 \leq M(1, 1)$ ve $K(0, 0) \leq K(0, 1)=0$ durumlarını içermekte, bu da $M(1, 1)=1$ ve $K(0, 0)=0$ şartlarını gerçeklemektedir.

Bu işlemlerin gerektirdiği diğer bir özellik, iki puslu küme arasındaki işlemde kümelerin sırasının öneminin olmadığını yani kesişim ve birleşim işleminin bakışımı (symmetric) olduğunu ifade eden “**yer değiştiricilik**” özelliğidir. Yukarıda gösterilmiş olan bu zorunlu özelliğe göre M ve K tanımları

$$M(f_A(x), f_B(x)) = M(f_B(x), f_A(x))$$

$$K(f_A(x), f_B(x)) = K(f_B(x), f_A(x))$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu özellik sayesinde $M(0, 1)=M(1, 0)=1$ ve $K(0, 1)=K(1, 0)=0$ şartları sağlanmaktadır.

¹¹ Bkz.: Yager, Filev, a.g.e., s. 33.

¹² Yager, Filev, a.g.e., s. 33.

Burada son olarak “**birleşirlik**” özelliğinin de dikkate alınması gereklidir. Çünkü bu özellik, işlemlere ilişkin temel şartların sağlanmasında belirli bir etkinliğe sahip değilse de, bir işlemin ikiden fazla küme arasında yapılması durumunda, ikili grupların arzu edilen şekilde düzenlenmesine imkan tanıyarak sonucun geçerliliğini garanti etmesi açısından gerek klasik gerekse puslu işlemler için çok önemlidir¹³. Birden fazla puslu küme arasındaki işlemde kümelerin sırasının önemsiz olduğunu belirten bu özelliğe göre:

$$M(f_A(x), M(f_B(x), f_C(x)))=M(M(f_A(x), f_B(x)), f_C(x))$$

$$K(f_A(x), K(f_B(x), f_C(x)))=K(K(f_A(x), f_B(x)), f_C(x))$$

olmalıdır.

Yukarıda sıralamış olduğumuz dört şart, işlemlere ilişkin yani şahsi özdeşlikler, monotonluk, yer değiştiricilik ve birleşirlik, birleşim ve kesişimin genel sınıflarını tanımlayan M ve K işlemlerinin nitelendirilmesi için kullanılan birer aksiyom durumundadırlar. Öyleyse söz konusu aksiyomlar kümesi, puslu kümelerdeki birleşim ve kesişim işlemlerinin aksiyomatik çatısı ya da iskeleti olarak adlandırılabilir¹⁴.

Şimdiye kadar M ile göstermiş olduğumuz herhangi bir birleşim işlemi, “**t-bir.normu**” işlemiyle genellenir. Yukarıdaki özellikler dikkate alındığında a, b, $c \in [0, 1]$ için bir M işlemi, aşağıdaki aksiyomları gerçeklediği taktirde t-bir.normu olarak adlandırılır:

M1. Aksiyom

$$M(a, 0)=a$$

Sıfır (0) özdeşliği

¹³ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 62.

¹⁴ **A.e.**, s. 62, s. 77.

M2. Aksiyom

$$b \leq c \text{ için } M(a, b) \leq M(a, c)$$

Monotonluk

M3. Aksiyom

$$M(a, b) = M(b, a)$$

Yer değiştiricilik

M4. Aksiyom

$$M(a, M(b, c)) = M(M(a, b), c)$$

Birleşirlik

M1., M2. ve M3. aksiyomlar, birleşimin $M(1, 1) = M(0, 1) = M(1, 0) = 1$ ve $M(0, 0) = 0$ şeklindeki temel özelliklerini sağlayarak, A ve B klasik kümeler olduklarında, $A \cup B = M(f_A(x), f_B(x))$ şeklinde gösterdiğimiz puslu küme birleşiminin klasik küme birleşimine dönüşeceğini ifade etmektedirler¹⁵.

Puslu mantıkta birleşimin genel gösterimi olarak ifade edilen ve “**standart birleşim**” (standard union) adı verilen $\text{Max}(f_A(x), f_B(x))$ ile “**cebirsel toplam**” (algebraic sum) ya da “**olasılıklı toplam**” (probabilistic sum) olarak adlandırılan $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$ işlemleri, t-bir.normu işlemlerinin örnekleridir. t-bir.norm işleminin sıklıkla kullanılan diğer bir rneği $\text{Min}(1, f_A(x) + f_B(x))$ şeklinde gösterilen “**sınırlı toplam**” (bounded sum) işlemidir. “**Zorlayıcı birleşim**” (drastic union) adını alan bir başka birleşim işlemi ise $M(f_A(x), f_B(x))$ için $f_B(x) = 0$ olduğunda $f_A(x)$, $f_A(x) = 0$ olduğunda $f_B(x)$, diğer durumlarda ise 1 değerini veren bir iřlemdir¹⁶. Standart birleşim M_S , cebirsel toplam M_C , sınırlı toplam M_I ve zorlayıcı birleşim ise M_Z ile gösterildiğinde bu birleşim işlemleri arasındaki genellik durumu

$$M_S(a, b) \leq M_C(a, b) \leq M_I(a, b) \leq M_Z(a, b)$$

¹⁵ A.e., s. 77.

¹⁶ Bkz.: Klir, Yuan, a.g.e., s. 78., Yager, Filev, a.g.e., s. 33.

şeklinde ifade edilebilir¹⁷. $M_s(a, b)$ yani Max işleminin diğerlerine göre eşsizliği, bu işlemin bütün mümkün t-bir.normlarının en küçüğü olduğu olgusu üzerine temellenir¹⁸.

$a, b, c \in [0, 1]$ için bir K işlemi, bu işlem için aşağıdaki aksiyomlar geçerli ise **t-normu** olarak adlandırılır:

K1. Aksiyom

$$K(a, 1) = a$$

Bir (1) özdeşliği

K2. Aksiyom

$$b \leq c \text{ için } K(a, b) \leq K(a, c)$$

Monotonluk

K3. Aksiyom

$$K(a, b) = K(b, a)$$

Yer değiştiricilik

K4. Aksiyom

$$K(a, K(b, c)) = K(K(a, b), c)$$

Birleşirlik

K1., K2. ve K3. aksiyomlar, kesişimin $K(0, 1) = K(1, 0) = K(0, 0) = 0$ ve $K(1, 1) = 1$ şeklindeki temel özelliklerini sağlayarak, A ve B klasik kümeler olduklarında, $A \cap B = K(f_A(x), f_B(x))$ şeklinde gösterdiğimiz puslu küme kesişiminin klasik küme kesişimine dönüşeceğini ifade etmektedirler¹⁹.

Puslu mantıkta kesişimin genel gösterimi olarak tanımlanan ve **“standart kesişim”** (standard intersection) adı verilen $\min(f_A(x), f_B(x))$ ile **“cebirsel çarpım”** (algebraic product) ya da kısaca **“çarpım”** olarak adlandırılan $f_A(x)f_B(x)$ işlemleri t-normu işlemlerinin örnekleridir. t-norm işleminin bir başka örneği $\max(0, f_A(x) + f_B(x) - 1)$ şeklinde gösterilen **“koyu birleşim”** (bold union) ya da diğer adıyla **“sınırlı fark”** (bounded difference) işlemidir. **“Zorlayıcı kesişim”** (drastic

¹⁷ Buckley, Eslami, **a.g.e.**, s. 32.

¹⁸ Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 33.

¹⁹ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 62.

intersection) adını alan bir başka kesişim işlemi ise $K(f_A(x), f_B(x))$ için $f_B(x)=1$ olduğunda $f_A(x)$, $f_A(x)=1$ olduğunda $f_B(x)$, diğer durumlarda ise 0 değerini veren bir işlemidir²⁰. Standart kesişim K_S , cebirsel çarpım K_C , sınırlı fark K_I ve zorlayıcı kesişim ise K_Z ile gösterildiğinde bu kesişim işlemleri arasındaki genellik durumu

$$K_Z(a, b) \leq K_I(a, b) \leq K_C(a, b) \leq K_S(a, b)$$

şeklinde ifade edilebilir²¹. $K_B(a, b)$ yani Min işleminin diğerlerine göre eşsizliği, bu işlemin bütün mümkün t-normlarının en geniş olduğu olgusu üzerine temellenir²².

Herhangi bir t-bir.normu ya da t-normu, taşıdığı ya da taşımadığı bir takım özelliklerden ötürü belirli durumlarda diğerlerine göre daha kullanışlı olabilir. Bir işlemi vazgeçilmez kılan kimi özellikler, bazı durumlarda bu işlemin terk edilmesine sebebiyet verebilirler. Genellikle uygulamalara bağlı olarak ortaya çıkan bir takım ihtiyaçlar işlem seçimlerinde belirleyici olmaktadır. Örneğin, $f_A(x)$ için birleşim ve kesişim işlemlerinin

$$M(f_A(x), f_A(x)) = f_A(x)$$

$$K(f_A(x), f_A(x)) = f_A(x)$$

şeklinde gösterilen “**denk güçlülük**” (idempotency) özelliği bazı uygulamalar için oldukça gerekli bir özellik durumunda iken bazı uygulamalarda hiç de gerekli değildir. Yager ve Filev’in belirttiği gibi:

“(Denk güçlülük) özellikle bir grup puslu kümeyi birleştirdiğimiz (ayırdığımız) ve bir kümenin yanlışlıkla tekrar edilebileceği durumlarda faydalıdır. Bir kümenin birden fazla etkide bulunmasını istemediğimiz taktirde bu özelliği ararız”²³.

²⁰ Bkz.: Klir, Yuan, **a.g.e.**, s.63., Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 36.

²¹ Buckley, Eslami, **a.g.e.**, s. 31.

²² Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 33.

Böyle bir uygulama alanı için denk güçlülük özelliği, birleşim ve kesişim işlemlerinin zorunlu özelliği yani ilave aksiyomu durumundadır. Mevcut t-bir.norm ve t-norm işlemleri denk güçlülük açısından değerlendirildiğinde, sadece Max ve Min işlemlerinin denk güçlü olduğu görülecek; buna göre Yager ve Filev'in sözünü ettiği uygulama alanında yapılacak birleşim ve kesişim işlemleri için sadece bu iki işlem kullanılacaktır. Max ve Min işlemlerinin birleşim ve kesişim alanlarında benzeri olmayan bir etkinliğe sahip olmaları, onların diğer t-bir.normları ve t-normlarına göre her durum için ayrıcalıklı olduğu şeklinde yorumlanmamalıdır. Örneğin denk güçlülük özelliğini gerekli görmeyen bazı uygulamalarda Max ve Min işlemleri elverişli değildir. Birleşim işlemini, **“süreklilik”** (continuity), **“süper denk güçlülük”** (superidempotency) ve **“kesin monotonluk”** (strict monotonicity) olarak adlandırılan üç özelliğin taşınmasını zorunlu kılarak sınırlayan söz konusu uygulama alanları için geçerli ilave aksiyomlar $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ için

M5. Aksiyom

M süreklidir²⁴.

Süreklilik

M6. Aksiyom

$M(a, a) > a$

Süper denk güçlülük

M7. Aksiyom

$a_1 < a_2$ ve $b_1 < b_2$ ise $M(a_1, b_1) < M(a_2, b_2)$

Kesin monotonluk

şeklinde sıralanabilir. Süreklilik aksiyomu, A ya da B kümesinden herhangi birinin üyelik derecesindeki çok küçük bir değişikliğin, bu iki kümenin birleşim kümesindeki üyelik derecesinde yaratacağı çok büyük (sürekli [discontinuous]) bir

²³ A.e.

²⁴ Bir fonksiyon, girişindeki (input) keyfi küçük değişiklikler çıkışında (output) keyfi küçük değişikliklere yol açıyorsa sürekli (continuous) fonksiyon; girişindeki küçük değişiklikler, çıkışında büyük bir sıçrama yaratıyorsa sürekli (discontinuous) fonksiyon olarak adlandırılır. (Bkz.: “Continuous Function”, **Wikipedia**, (Çevrimiçi) <http://www.wikipedia.org>, 2 Aralık 2004; Lawrence S. Husch, “Visual Calculus”, 2001, (Çevrimiçi) <http://www.archives.math.utk.edu/visual.calculus>, 2 Aralık 2004.)

değişikliğın önüne geçer. M6. aksiyom, A ve B'deki her iki üyelik derecesinin aynı a değerine sahip olduğu özel bir durum ile uğraşır. Bu aksiyom bu iki kümenin birleşim kümesindeki üyelik derecesinin a'dan büyük olması gerektiğini ifade eder. Bu şart $M(a, a)=a$ şeklinde gösterebileceğimiz denk güçlölük özelliğinden daha güçlüdür. Bu nedenle süper denk güçlölük olarak adlandırılmıştır. M7. aksiyom ise sadece daha güçlü bir monotonluk durumunu belirtir. Herhangi bir sürekli ve süper denk güçlü t-bir.normu “**Arşimetçi (Archimedean) t-bir.normu**” olarak adlandırılır. Bu norm bir de kesin monoton ise o zaman “**kesin Arşimetçi t-bir.normu**” adını alır²⁵.

İlgili uygulama alanlarında puslu birleşim işlemine paralel olarak puslu kesişim işlemi için önerilmiş ilave aksiyomlar ise, $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ için şu şekilde gösterilirler:

K5. Aksiyom

M sürekli dir.

Sürekli lik

K6. Aksiyom

$M(a, a) < a$

Alt denk güçlölük

K7. Aksiyom

$a_1 < a_2$ ve $b_1 < b_2$ ise $K(a_1, b_1) < K(a_2, b_2)$

Kesin monotonluk

Dikkat edilirse M5. ve K5. aksiyomlar ile M7. ve K7. aksiyomlar aynı özellikleri ifade etmektedirler. Sadece M6. aksiyomun ifade ettiğı süper denk güçlölük özelliğı, yerini K6. aksiyomda “**alt denk güçlölük**” (subidempotency) olarak adlandırılan özelliğ e bırakmıştır. Alt denk güçlölük, A ve B'deki her iki üyelik derecesinin aynı a değerine sahip olduğu özel bir durumda bu iki kümenin kesişim kümesindeki üyelik derecesinin a'dan küçük olması gerektiğini ifade eder. Bu şart denk güçlölükten daha zayıf olduğundan alt denk güçlölük olarak adlandırılmıştır. Herhangi bir sürekli ve alt denk güçlü t-normu “**Arşimetçi t-**

²⁵ Bkz.: Klir, Yuan, a.g.e., s. 77.

normu” olarak adlandırılır. Bu norm bir de kesin monoton ise o zaman **“kesin Arşimetçi t-normu”** adını alır²⁶.

Alt ve süper denk güçlülük özellikleri, denk güçlülük özelliğinin karşıt ucunda yer aldıklarından, denk güçlülük özelliğini gerçekleyen Max ve Min işlemleri Alt ve süper denk güçlülük özelliklerini isteyen böyle bir uygulamada işe yaramamakta, bu Arşimetçi özellikleri gerçekleyen cebirsel toplam ve çarpım işlemlerinin alternatifi olamamaktadırlar²⁷.

Puslu alanda özelliklerin, bir başka gruba karşıt olabilecek şekilde bir araya gelmesi, bir işlem seçiminde zaman zaman bu özellik grupları arasından seçim yapılması zorunluluğunu doğurmaktadır. Özelliklerin birbirleriyle ilişkileri, doğal olarak birleşim ve kesişim işlemleri arasında da benzeri ilişkiler yaratmakta, bu durum bağlayıcı bir takım karşıtlıklara veya eşleşmelere yol açmaktadır.

Yager ve Filev’e göre:

“Genellikle kesişim işleminin seçimi birleşim işleminin seçiminden tamamıyla bağımsız değildir. Bu bağlantı, puslu kümelerdeki değilleme (tümleme) işlemi ortaya konulduğunda belirginleşecektir. Görüleceği üzere değillemenin ortaya konulması t-normları ve t-bir.normları arasında oldukça ilginç bir ilişki üretir”²⁸.

Metinden de anlaşıldığı gibi karşıtlıkların ya da eşleşmelerin belirlenmesi için tümleme işleminin açık bir şekilde tanımlanması gerekmektedir. O halde, daha önce en genel şekliyle ele aldığımız bu işlemin, birleşim ve kesişim işlemleri için de yapıldığı gibi, öncelikle aksiyomatik yapısı açısından değerlendirilmesi, sonrasında diğer işlemlerle ilişkisi üzerinde durulması uygun olacaktır.

Bir T işlemi, $a, b \in [0, 1]$ için **“sınır”** (boundary), **“düzenli ters çevrim”** (order reversing) ve **“çift tümleme”** (involution) olarak adlandırılan şu üç aksiyomu gerçeklediği takdirde tümleme olarak adlandırılmaktadır:

²⁶ Bkz.: Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 63.

²⁷ Bkz.: Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 34.

²⁸ A.e., s. 35.

T1. Aksiyom

$$T(1)=0; T(0)=1$$

Sınır

T2. Aksiyom

$$a>b \text{ için } T(a)\leq T(b)$$

Düzenli ters çevrim

T3. Aksiyom

$$T(T(a))=a$$

Çift tümlleme

Bu tümlleme işlemi kullanılarak bir A puslu kümesinin tümleyeni

$$f_{A'}(x)=T(f_A(x))$$

olarak gösterilebilir. T3. aksiyomun gerekli görülmemesi durumunda ortaya çıkan şey “**sezgisel (intuitionistic) tümlleme**” olacaktır. Puslu kümelerin tümlleme işlemi için alışlagelmiş tanımı yani $f_{A'}(x)=1-f_A(x)$, yukarıdaki şartları açıkça gerçekleyen $T(a)=1-a$ tümlleme işleminin kullanımı üzerine temellenmiştir²⁹.

Böyle bir tümlleme işlemi, t-bir.normları ve t-normlarıyla ilişkili genel bir De Morgan kanunu elde edilmesine izin verir. M'nin herhangi bir t-bir.norm işlemi olduğu varsayıldığında bir K t-norm işlemi

$$K(f_A(x), f_B(x))=1-M(f_A(x), f_B(x))$$

şeklinde tanımlanabilir. Buna göre belirli bir M işlemi için yukarıdaki gibi tanımlanacak uygun bir K işlemi M'nin çifti (dual) olarak adlandırılır. Bu, eğer K bir t-normu ise $M(f_A(x), f_B(x))=1-K(f_A(x), f_B(x))$ olduğu anlamına da gelir. Eğer puslu küme birleşim ve kesişimini

²⁹ A.e., s. 35-36.

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

şeklinde gösterilen De Morgan kanunlarını gerçekleyecek şekilde tanımlamak istiyorsak, sırasıyla bu işlemleri gösteren M ve K, birbirlerinin çifti olmak zorundadırlar. Bu şarta göre standart birleşim M_S standart kesişim K_S ile; cebirsel toplam M_C cebirsel çarpım K_C ile; sınırlı toplam M_I sınırlı fark K_I ile ve zorlayıcı birleşim M_Z zorlayıcı kesişim K_Z ile birer işlem çifti oluşturmaktadırlar.

Bu bağlantılarla ilgili araştırmaların çok aktif bir alanı birleşim ve kesişim işlemlerinin parametrize edilmiş ailelerinin gelişimi olmuştur³⁰. Aşağıdaki Klir'den alınan tablo bu ailelerin bazılarının bir listesini içermektedir³¹:

Birleşim	Kesişim	Aralık	Müellif
$1 - \text{Max}[0, ((1-a)^{-p} + (1-b)^{-p}) - 1]^{1/p}$	$\text{Max}(0, a^{-p} + b^{-p} - 1)^{-1/p}$	$p \in (-8, 8)$	Schweizer&Sklar
$\frac{a+b-(2-\gamma)ab}{1-(1-\gamma)ab}$	$\frac{Ab}{\gamma+(1-\gamma)(a+b+ab)}$	$\gamma \in (0,8)$	Hamacher
$1 - \log_s \left[1 + \frac{(S^{1-a}-1)(S^{1-b}-1)}{S-1} \right]$	$\log_s \left[1 + \frac{(S^a-1)(S^b-1)}{S-1} \right]$	$S \in (0,8)$	Frank
$\text{Min}[1, (a^w + b^w)^{1/w}]$	$1 - \text{Min}[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}]$	$w \in (0,8)$	Yager
$\frac{a+b-ab-\text{Min}(a, b, 1-\alpha)}{\text{Max}(1-\alpha, 1-b, \alpha)}$	$\frac{Ab}{\text{Max}(a, b, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$	Dubois&Prade
$\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right\}^{-1/\lambda}}$	$\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{\lambda} \right\}^{1/\lambda}}$	$\lambda \in (0,8)$	Dombi

Tablo 1. Parametrize Edilmiş Bazı Birleşim ve Kesişim Aileleri

³⁰ A.e., s. 36.

³¹ Bkz.: Yager, Filev, a.g.e., s. 37., Klir, Yuan, a.g.e., s. 74., s. 82.

3.2. Klasik³² ve Puslu Bağıntılar

Mantıkta genel olarak, bir önermedeki herhangi bir şeye ilişkin bir özelliğe işaret eden yüklem “**tekli**” (monadic) yüklem; birden fazla şey arasındaki herhangi bir ilişkiyi ifade eden yüklem ise “**çoklu**” (polyadic) yüklem adını alır. Tekli yüklemeler özneye ait bir “**özellik**” ifade ederlerken, çoklu yüklemeler “**bağıntı**” ifade ederler. Örnek olarak “Ali çalışandır” önermesinde “çalışkan olma” yüklemi tekli bir yüklem olarak “Ali”ye ilişkin bir özellik bildirmekteyken, “Ali, Ayşe’nin babasıdır” önermesindeki “babası olma” yüklemi ise çoklu bir yüklem olarak “Ali” ve “Ayşe” arasındaki bir bağıntıya işaret etmektedir. Çoklu yüklemeler yani bağıntılar, bir araya getirdikleri şeylerin sayısı uyarınca “**ikili**” (dyadic), “**üçlü**” (triadic), “**dörtlü**” (tetradic), “**beşli**” (pentadic) vb. bağıntılar olarak adlandırılırlar³³. Teorik olarak “n” sayıda şey arasında bir bağıntı tasarlamak, yani n’li bir bağıntıdan söz etmek ve buna ilişkin işlemler yapmak mümkünse de burada konuyla ilgili örneklendirmeler ikili bağıntılar üzerine yapılacaktır.

Klasik kümeler teorisine göre bir bağıntı, kümelerin kartezyen çarpımının bir alt kümesi durumundadır³⁴. Puslu küme teorisinde klasik kümeler puslu kümelerin özel bir durumu olarak³⁵ değerlendirildiğine göre, iki ya da daha çok küme arasında bir ilişkinin, etkileşimin, karşılıklı bir bağlantının olup olmadığını gösteren³⁶ klasik bir bağıntı, puslu bağıntılarının özel bir durumu olarak düşünülebilir. Buna göre, kartezyen çarpımı kümesinin puslu bir altkümesi olarak tanımlanabilecek puslu bağıntı³⁷ ile buna ilişkin özellikler, klasik bağıntının ve özelliklerinin genellenmesi yoluyla elde edilebilirler.

3.2.1. Klasik Kartezyen Çarpım Kümesi

A ve B gibi iki klasik küme için kartezyen çarpım, ilk bileşeni A’ya, ikinci bileşeni ise B’ye ait olan (x, y) şeklindeki bütün sıralı çiftleri içeren bir küme olarak

³² Klasik küme tabanlı bir bağıntıyı klasik bağıntı olarak ifade etmeyi uygun buluyoruz..

³³ **Bkz.:** Yücel Yüksel, ““Bağıntı” Kavramının Mantık ve Felsefe Açısından İncelenmesi”, (yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Danışman: Prof. Dr. Şafak Ural, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Anabilim Dalı, Mantık Bilim Dalı, 2001, s. 21-22.

³⁴ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 119.

³⁵ **Bkz.:** Yager, Filev, **a.g.e.**, s. 4.

³⁶ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 119.

³⁷ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 70.

tanımlanır ve $A \times B$ şeklinde gösterilir³⁸. Çarpım sonucu ortaya çıkan sıralı çiftlerin ilk elemanı “**öncel**” (predecessor) ikinci elemanı ise “**ardıl**” (successor) olarak adlandırılır³⁹. Örnek olarak $A = \{\text{Ali, Ahmet, Mehmet}\}$ ve $B = \{\text{Ayşe, Fatma}\}$ klasik kümelerinin kartezyen çarpımı olan X kümesi

$$X = A \times B = \{(\text{Ali, Ayşe}), (\text{Ali, Fatma}), (\text{Ahmet, Ayşe}), (\text{Ahmet, Fatma}), (\text{Mehmet, Ayşe}), (\text{Mehmet, Fatma})\}$$

şeklinde gösterilmekte, bu kümenin elemanlarından birisi olan (Ali, Ayşe) sıralı çiftinde öncel “Ali”, ardıl ise “Ayşe” olmaktadır.

Bir bağıntı için, kartezyen çarpım ile elde edilen küme, bir konuşma evreni durumundadır. Bu konuşma evreni içerisinde herhangi bir bağıntı, söz konusu sıralı çiftlerin sadece bir kısmı tarafından gerçekleştirilebileceği gibi tümü tarafından da gerçekleştirilebilir. Bu tamamıyla bağıntının ilgili sıralı çiftlerin öncül ve ardıları arasında bir ilişkiyi mümkün kılıp kılamamasıyla alakalıdır. Sıralı çiftlerin bir kısmı tarafından gerçekleştirilen bir bağıntı konuşma evreninin ilgili sıralı çiftlerini barındıran bir alt kümesi, tüm sıralı çiftler tarafından gerçekleştirilmiş bir bağıntı ise konuşma evrenine özdeş bir küme olur. Bir bağıntının, hiçbir sıralı çift tarafından gerçekleştirilmemesi durumunda konuşma evreni için bir şey ifade etmeyeceği açıktır.

3.2.2. Klasik Bağıntıların Gösterimi

Çarpım işlemi yapılan kümelerdeki öğelerin sonlu olduğu durumlar için ikili bir bağıntı, liste yöntemiyle⁴⁰, ilgili kartezyen çarpım kümesinin bu bağıntıyı gerçekleyen sıralı çiftlerini içeren bir altkümesi olarak ifade edilebileceği gibi “**matris**” şeklinde de gösterilebilir⁴¹. Bir matriste bağıntı taşıyan ilişki biçimleri “1”, taşımayanlar ise “0” değerini alırlar. Bu tür bağıntıların diğer bir gösterim yöntemi

³⁸ Albert Monjallon, **An Introduction to Modern Mathematics**, Çev. Peter Fantham, Edinburgh and London, Oliver & Boyd Ltd., 1967, s. 102.

³⁹ Alfred Tarski, **Introduction to Logic**, Düzenlenmiş 2. bs., New York, Oxford University, 1946, s. 88.

⁴⁰ Metin içerisinde **Bkz.: 2.1.2.1. Liste Yöntemi** ve **2.1.2.3. Üyelik Fonksiyonu Yöntemi**

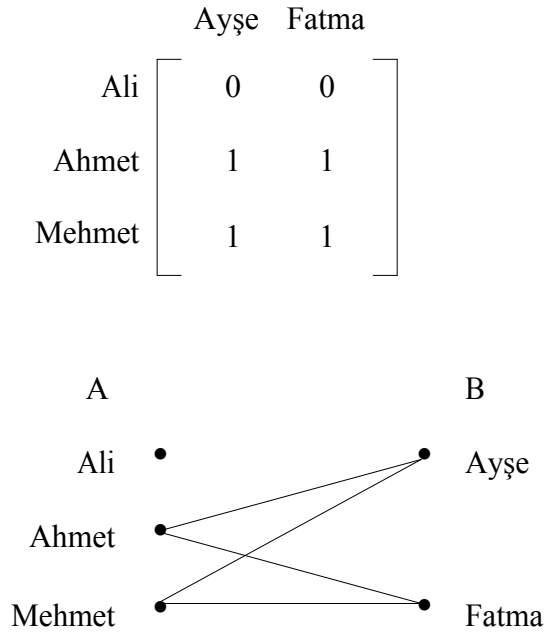
⁴¹ Şen, **a.g.e.**, s. 89. Şen çalışmasında “relation” teriminin Türkçe karşılığı olarak “ilişki” terimini kullanmaktaysa da biz daha önceki çalışmalarımızda da kullandığımız şekliyle “bağıntı” terimini tercih ediyoruz. Bu nedenle Şen’den yapılan alıntılarda, (eğer bire bir alıntı değilse) “ilişki” terimi yerine “bağıntı” terimini kullanacağız.

ise “**sagittal diyagramı**”dır. Bu diyagramda küme elemanları nokta ile gösterilirken aralarında bağıntı bulunan küme elemanlarını temsil eden noktalar çizgilerle ilişkilendirilir⁴².

$A=\{\text{Ali, Ahmet, Mehmet}\}$ ve $B=\{\text{Ayşe, Fatma}\}$ klasik kümelerinin kartezyen çarpım kümesi için bir R “kardeşi olma” bağıntısının (Ahmet, Ayşe), (Mehmet, Ayşe), (Ahmet, Fatma), (Mehmet, Fatma) sıralı çiftleri için geçerli olması durumunda bu bağıntı $R(A, B)$ şeklinde ifade edilir ve liste yöntemiyle

$$R(A, B) = \{(\text{Ahmet, Ayşe}), (\text{Mehmet, Ayşe}), (\text{Ahmet, Fatma}), (\text{Mehmet, Fatma})\}$$

şeklinde gösterilir⁴³. İlgili bağıntının matris ve sagittal diyagramı yardımıyla gösterimi ise sırasıyla şu şekilde olmaktadır:



Grafik 18. Klasik Bir Bağıntının Sagittal Diyagramıyla Gösterimi

⁴² Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 125., **Bkz.:** Şen, **a.g.e.**, s. 89-90.

⁴³ **Bkz.:** Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 120.

3.2.3. Puslu Bağntıların Gösterimi

Klasik bağntıların gösterimi için kullanılan bu yöntemler puslu bağntıların gösteriminde de kullanılabilir. Ancak puslu bağntıların gösteriminde sadece (0, 1) sınır durumlarına değil, [0, 1] birim aralığında yer alan üyelik derecelerine de yer verilmelidir. Bir puslu bağntının liste yöntemiyle gösteriminde, klasik bağntıların gösteriminden farklı olarak kartezyen çarpım kümesinin tüm sıralı çiftlerinin, üyelik dereceleriyle birlikte gösterilmesi gerekmektedir. Elbette bağntıyı gerçeklemeyen sıralı çiftlerin (yani üyelik derecesi “0” olanların) ifade edilmesi zorunlu değildir. Matris ile gösterimde, ilgili puslu bağntıyı tam olarak gerçekleyen ilişki biçimleri “1”, gerçeklemeyenler ise “0” ile gösterilirken, diğer ilişki biçimleri üyelik dereceleriyle ifade edilirler. Sagittal diyagramıyla gösterimde ise bağntıyı gerçekleyen ilişki biçimlerini gösteren doğrular üzerine üyelik dereceleri yazılır.

Örneğin $A=\{\text{Ankara, İstanbul}\}$ ve $B=\{\text{Kars, Ankara, Sakarya}\}$ kümelerinin X kartezyen çarpım kümesi

$$X=A \times B = \{(\text{Ankara, Kars}), (\text{Ankara, Ankara}), (\text{Ankara, Sakarya}), (\text{İstanbul, Kars}), (\text{İstanbul, Ankara}), (\text{İstanbul, Sakarya})\}$$

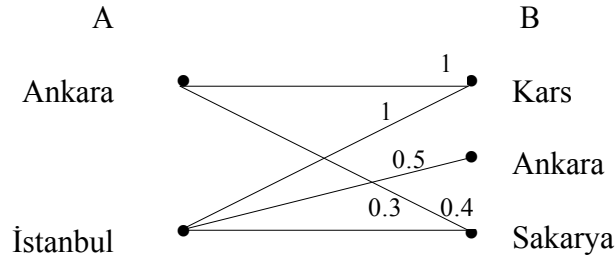
iken bu kartezyen çarpım kümesi için “çok uzak” kavramını gösteren puslu bir R bağntısı liste yöntemiyle

$$R(A, B) = \{1/(\text{Ankara, Kars}), 0/(\text{Ankara, Ankara}), 0.4/(\text{Ankara, Sakarya}), 1/(\text{İstanbul, Kars}), 0.5/(\text{İstanbul, Ankara}), 0.3/(\text{İstanbul, Sakarya})\}$$

şeklinde gösterilebilirken aynı puslu bağntının matris ve sagittal diyagramıyla gösterimleri ise sırasıyla şu şekilde olacaktır⁴⁴:

⁴⁴ Bkz.: Klir, Yuan, a.g.e., s. 121., s. 126.

	Kars	Ankara	Sakarya
Ankara	1	0	0.4
İstanbul	1	0.5	0.3



Grafik 19. Puslu Bir Bağıntının Sagittal Diyagramıyla Gösterimi

3.2.4. Puslu Bağıntılar Arasındaki İlişkiler

Daha önce ayrıntılı bir şekilde incelediğimiz kümeler arası ilişkiler, bağıntılar için de geçerlidir. Bağıntılar, tek tek şeyleri değil sıralı çiftleri içeren kümeler olduklarına göre, bunlar arasındaki ilişkilerde değerlendirilmesi gereken unsurlar sıralı çiftler olmaktadır. Eğer söz konusu küme ilişkileri puslu bağıntılar arasındaysa, işlemlerde üyelik derecelerinin de hesaba katılması gerekir. Klasik kümeler için olduğu gibi puslu kümeler için de temel ilişki biçimleri olan altküme ilişkisi, bir kümenin tümlenişi, iki küme arasındaki birleşim ve kesişim ilişkilerinin puslu bağıntılarda en genel biçimleriyle uygulanışı, $X \times Y$ 'nin bir konuşma evreni, R ve S 'nin ise bu konuşma evreni üzerinde yer alan iki puslu bağıntı olması durumu için sırasıyla şu şekilde gösterilebilir⁴⁵:

Altküme

$$R \subseteq S \text{ ise } f_R(x, y) \leq f_S(x, y)$$

⁴⁵ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 94-95.

Tümleyen

$$f_{R'}(x, y) = 1 - f_R(x, y)$$

Birleşim

$$f_{R \cup S}(x, y) = \text{Max}[f_R(x, y), f_S(x, y)]$$

Kesişim

$$f_{R \cap S}(x, y) = \text{Min}[f_R(x, y), f_S(x, y)]$$

3.2.5. Puslu Bağıntılara İlişkin Bazı Kümelerin Belirlenmesi

3.2.5.1. Puslu Kartezyen Çarpım Kümesi

Genel hatlarıyla, klasik kümelerin kartezyen çarpım kümesi üzerinde, klasik bağıntılarla benzerlikleri açısından değerlendirmeye ve açıklamaya çalıştığımız puslu bağıntılar, puslu küme teorisi esas alınarak incelendiğinde bir takım farklı ilişkilere zemin oluşturmaktadırlar. Bunlardan şüphesiz en önemlisi puslu kartezyen çarpım kümesidir. A ve B'nin sırasıyla X ve Y'nin puslu altkümeleri, onların AxB puslu kartezyen çarpımının XxY kümesi üzerinde bir R puslu bağıntısına eşit olduğunu varsaydığımızda bu bağıntı

$$f_R(x, y) = \text{Min}[f_A(x), f_B(y)]$$

şeklinde tanımlanmakta; bu işlem uyarınca, örnek olarak $X = \{a, b, c\}$ ve $Y = \{1, 2, 3\}$ iken $A = \{1/a, 0.6/b, 0.3/c\}$ ve $B = \{1/1, 0.5/2, 0/3\}$ olduğunda ilgili puslu kartezyen çarpım kümesi şu olmaktadır⁴⁶:

$$A \times B = \{1/(a, 1), 0.5/(a, 2), 0/(a, 3), 0.6/(b, 1), 0.5/(b, 2), 0/(b, 3), 0.3/(c, 1), 0.3/(c, 2), 0/(c, 3)\}$$

⁴⁶ Bkz.: Yager, Filev, a.g.e., s. 13.

3.2.5.2. Silindirik Genişletim ve Projeksiyon

Puslu kartezyen çarpım kümesinin tanımına müteakiben, bu çarpımın özel bir durumu olarak puslu bağıntılarla ilgili bazı işlemlerde kullanılmakta olan “**silindirik genişletim**” (cylindrical extension) ile bunun tersi bir işlem olan “**projeksiyon**” işlemlerinden bahsetmek yerinde olacaktır. Bu işlemlerden ilki puslu kümenin alanını (domain) genişletirken diğeri daraltmaktadır⁴⁷.

X ve Y’nin iki klasik küme, A’nın ise X’in bir altkümesi olduğunu varsaydığımızda, A’nın XxY’ye silindirik genişletimi, XxY üzerinde puslu bir bağıntı durumundaki AxY kartezyen çarpımı olarak tanımlanır ve $\hat{A}$ ile gösterilir. Yukarıda örnek olarak verilmiş kümeler için $\hat{A}$ yani ilgili silindirik genişletim şu şekilde ifade edilir:

$$\hat{A}=\{1/(a, 1), 1/(a, 2), 1/(a, 3), 0.6/(b, 1), 0.6/(b, 2), 0.6/(b, 3), 0.3/(c, 1), 0.3/(c, 2), 0.3/(c, 3)\}$$

A’nın XxY üzerinde puslu bir bağıntı olması durumunda A’nın, $A^\circ = \text{Proj}_X A$ şeklinde ifade edilen X üzerindeki A° projeksiyonu, X’in puslu bir altkümesi olup şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$f_{A^\circ}(x) = \text{Max}_y[f_A(x, y)]$$

Örnek olarak $X=\{a, b, c\}$ ve $Y=\{1, 2, 3\}$ iken $A=\{1/(a, 1), 0.6/(a, 2), 0.4/(a, 3), 0.5/(b, 1), 0.8/(b, 2), 0.2/(b, 3), 0.3/(c, 1), 0.1/(c, 2), 0.3/(c, 3)\}$ olduğunda A’nın X ve Y kümeleri için projeksiyonları sırasıyla şu şekilde olacaktır:

$$\text{Proj}_X A = \{1/a, 0.8/b, 0.3/c\}$$

$$\text{Proj}_Y A = \{1/1, 0.8/2, 0.4/3\}$$

⁴⁷ Lotfi A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 406., Yager, Filev, a.g.e., s. 13-14.

3.2.5.3. Standart Bileşim İşlemi

Puslu bağıntılara ilişkin kümeler tanımlanırken iki puslu bağıntı kümesi tarafından içerilen sıralı çiftler arasındaki geçişlilik ilişkisi sonucu ortaya çıkan üçüncü bir bağıntı kümesinin üyelik değerlerinin tespitini sağlayan ve **“standart bileşim”** (standard composition) olarak adlandırılan işlem de açıklanmalıdır⁴⁸. max-min bileşimi olarak da adlandırılan ve standart t-bir.normu ve t-normu üzerine temellenmiş olan bu işlem uyarınca, örnek olarak $R(X,Y)$ ile $S(Y, Z)$ puslu bağıntılarından, bir $T(X, Z)$ bağıntısının elde edilişi şu şekilde olmaktadır:

$$f_T(x, z) = f_{[R \bullet S]}(x, z) = \text{Max Min}[f_R(x, y), f_S(y, z)]$$

Örnek olarak⁴⁹ $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ ve $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ iken $R(X, Y) = \{0.7/(x_1, y_1), 0.5/(x_1, y_2), 0.8/(x_2, y_1), 0.4/(x_2, y_2)\}$ ve $S(Y, Z) = \{0.9/(y_1, z_1), 0.6/(y_1, z_2), 0.2/(y_1, z_3), 0.1/(y_2, z_1), 0.7/(y_2, z_2), 0.5/(y_2, z_3)\}$ olması durumunda $T(X, Z)$ bağıntı kümesi şu şekilde gösterilir:

$$T(X, Z) = \{0.7/(x_1, z_1), 0.6/(x_1, z_2), 0.5/(x_1, z_3), 0.8/(x_2, z_1), 0.6/(x_2, z_2), 0.4/(x_2, z_3)\}$$

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için yapılan işlemi bir de matris üzerinde gösterelim:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & y_1 & y_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \bullet \begin{array}{ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \\ y_2 & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \\ x_2 & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Dikkat edilirse, (T) sonuç bağıntısını gösteren matrisin ilk elemanı olan (x_1, z_1) sıralı çiftinin üyelik derecesi, yukarıda belirtilmiş olduğumuz eşdeğerlik uyarınca,

⁴⁸ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 96., Klir, Yuan, a.g.e., s. 125.

⁴⁹ Şen, a.g.e., s. 97., Bkz.: Klir, Yuan, a.g.e., s. 126-127.

birinci (R) bağıntı matrisinin x_1 satırındaki üyelik derecelerinin sırasıyla ikinci (S) bağıntı matrisindeki z_1 sütununun üyelik dereceleri ile önce min, sonra max işlemleri ile karşılaştırılması suretiyle elde edilmiştir. Daha açık bir şekilde ifade edersek, (x_1, z_1) sıralı çiftinin üyelik derecesi, önce (x_1, y_1) sıralı çiftinin üyelik derecesi ile (y_1, z_1) sıralı çiftinin üyelik derecesinin minimumunun (yani $\min(0.7, 0.9)$), sonra (x_1, y_2) sıralı çiftinin üyelik derecesi ile (y_2, z_1) sıralı çiftinin üyelik derecesinin minimumunun (yani $\min(0.5, 0.1)$) tespiti ve ardından ortaya çıkan bu iki üyelik derecesinin maksimumunun alınması yoluyla belirlenmiştir. T bağıntı kümesine ait diğer üyelik dereceleri de benzeri bir yol izlenerek tespit edilebilir. Mesela (x_2, z_3) 'ün üyelik derecesi $\max[\min(0.8, 0.2), \min(0.4, 0.5)]$ işleminin sonucu yani 0.4 olmaktadır.

3.2.6. Tek Kümeye İlişkin Bağıntılar ve Özellikleri

Herhangi bir ikili bağıntı, şimdiye kadar değerlendirilmiş olduğu şekliyle A ve B gibi farklı iki küme arasında tanımlanabileceği gibi, X gibi tek bir kümenin elemanları arasında da tanımlanabilir⁵⁰. Bu durumda ilgili kartezyen çarpım kümesi bu tek kümenin kendisiyle çarpımı ile elde edilir ve bir X kümesi için bu konuşma evreni $X \times X$ ya da X^2 şeklinde gösterilir. Örnek olarak “Ali” ve “Ayşe” elemanlarını içeren bir X kümesinin Y kartezyen çarpım kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$Y = X \times X = \{(Ali, Ali), (Ali, Ayşe), (Ayşe, Ali), (Ayşe, Ayşe)\}$$

Böyle bir kümede, iki farklı kümenin kartezyen çarpım kümesinden farklı olarak sıralı çiftlerin “**yönü**”ne (direction)⁵¹ de dikkat etmek gerekmektedir. Kolayca anlaşılacağı gibi yukarıdaki çarpım kümesine ait (Ali, Ayşe) ile (Ayşe, Ali) sıralı çiftleri aynı elemanları içeriyor olsalar da yönelimleri itibariyle birbirlerinden farklı iki ilişki biçimini ifade etmektedirler⁵².

Çeşitli tiplerdeki $R(X, X)$ bağıntıları, üç tipik özelliğin esas alınışıyla ayırt edilirler. Bu özellikler “**yansıma**” (reflexivity), “**bakışım**” (symmetry) ve

⁵⁰ Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 128.

⁵¹ **Bkz.:** George E. Hughes, David G. Londey, **The Elements of Formal Logic**, 2. bs., London, Presented by British Council, 1966, s. 271.

⁵² **Bkz.:** Yüksel, **a.g.e.**, s. 23.

“geçişlilik” (transitivity) özellikleridir⁵³. Öncelikle konuyu klasik bağıntıları ele alarak değerlendirecek olursak, en genel şekliyle $R(X, X)$ gibi bir bağıntı, eğer X ’in her elemanının kendisiyle kurabileceği bir bağıntıysa “yansımali” (reflexive), Eğer X ’in elemanlarının karşılıklı olarak gerçekleyebildikleri bir bağıntıysa “bakışimli” (symmetric), ortak elemana sahip iki sıralı çiftin gerçeklediği bir bağıntıysa bu ortak elemanların oluşturduğu diğer bir sıralı çift için de gerçekleştirilebilen bir bağıntıysa “geçişli” (transitive) bağıntı adını alır⁵⁴.

Bu üç özellik, bağıntıların üyelik fonksiyonları açısından tanımlanarak, $R(X, X)$ türünden ikili puslu bağıntılara genellenebilir. Buna göre bir $R(X, X)$ bağıntısı ancak ve ancak bütün $x \in X$ için

$$f_R(x, x) = 1$$

olduğunda yansımali olur. Yansımanın zayıf bir biçimi ε -yansımadır. $0 < \varepsilon < 1$ olduğunda

$$f_R(x, x) \geq \varepsilon$$

durumunu gerektiriyor oluşuyla tanımlanır⁵⁵. Bir puslu bağıntı bütün $x, y \in X$ için

$$f_R(x, y) = f_R(y, x)$$

durumu için bakışimlidir denir⁵⁶. Bir puslu bağıntı için, standart bileşim işleminin de esasını oluşturan geçişlilik özelliği, her bir $(x, z) \in X^2$ için

$$f_R(x, z) \geq \text{Max Min}[f_R(x, y), f_R(y, z)]$$

ilişkisinin gerçekleşmesi durumunda mümkün olmaktadır⁵⁷.

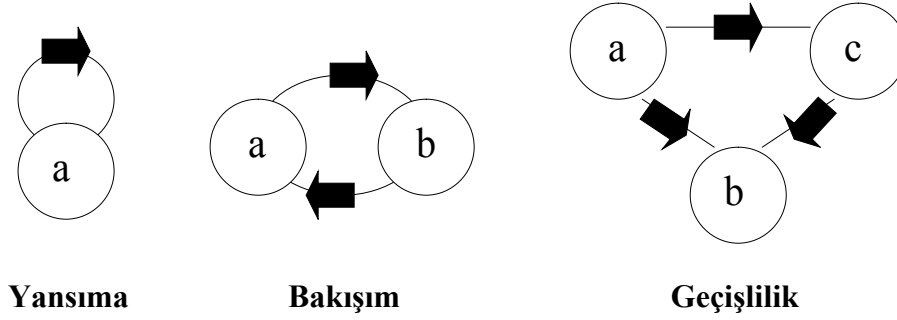
⁵³ Konuyla ilgili daha detaylı bilgi için **Bkz.:** A. e., s. 45-69.

⁵⁴ **Bkz.:** Klir, Yuan, a.g.e., s. 128-129.

⁵⁵ A.e., s. 130.

⁵⁶ A.e.

$R(X, X)$ türündeki ikili bağıntılar, diğer bağıntılar için kullanılan yöntemlerle (matris, sagittal diyagramı vb.) gösterilebilirler. İncelediğimiz özelliklerin basit gösterimleri ise şu şekilde olmaktadır⁵⁸.



Grafik 20. Tek Kümeye İlişkin Bağntı Özellikleri

3.3 “ ∞ -Kesikleri” ve “Güçlü ∞ -Kesikleri”

Puslu bir küme, daha çok bir üyelik fonksiyonu olarak değerlendirilmekle beraber, klasik altkümelerin **“kümelenmiş”** (nested) bir ailesi olarak da düşünülmektedir⁵⁹. Bu bağlamda puslu kümelerle klasik kümeler arasında ilişki kurulmasını sağlayan, bu kümelerin bir araya getirilişlerinde köprü vazifesi gören kavramlar “ ∞ -kesikleri” (∞ -cuts) ve onların varyantı olan **“güçlü ∞ -kesikleri”** (strong ∞ -cuts)⁶⁰.

Kesin verilere ihtiyaç duyulan klasik sistemlerde puslu bilgilerin doğrudan doğruya kullanımı mümkün değildir. Çeşitli sebeplerle, puslu bir sistem dahilinde elde edilen puslu sonuçların klasik bir sistem içerisinde kullanılabilmeleri ancak klasik sistemlerce değerlendirilebilecek biçime dönüştürülmeleri yani **“durulaştırılmaları”** ile mümkün olmaktadır⁶¹. Durulaştırılma işlemi, öncelikle yapılacak işlemin mahiyetine göre bir ∞ -kesiği ya da güçlü ∞ -kesiğinin belirlenmesini gerektirir. Konuyu kümeler çerçevesinde ifade edecek olursak, A ’nın X üzerinde puslu bir küme, ∞ ’nın ise $[0, 1]$ aralığında bir değer olması durumunda,

⁵⁷ A.e.

⁵⁸ A.e., s. 129.

⁵⁹ Dubois, Ostasiewicz, Prade, a.g.e, s, 44.

⁶⁰ Klir, Yuan, a.g.e., s. 35.

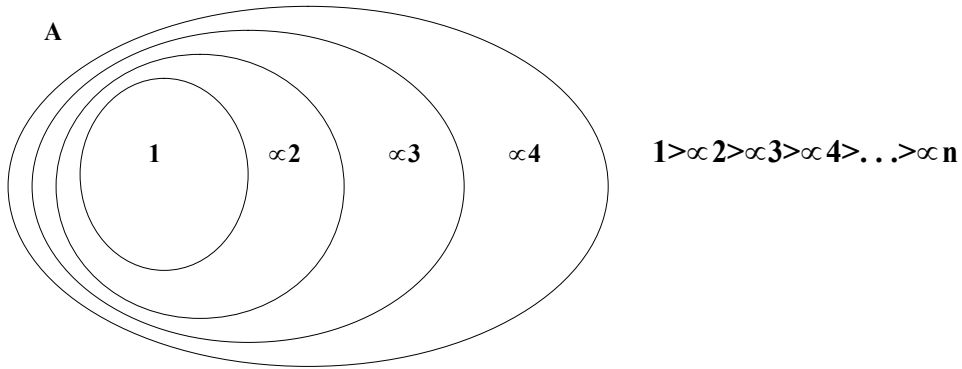
⁶¹ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 115.

${}^{\infty}A$ ile gösterilen ∞ -kesiği ve ${}^{\infty+}A$ ile gösterilen güçlü ∞ -kesiği şu şekilde tanımlanırlar⁶²:

$${}^{\infty}A = \{x \mid f_A(x) \geq \infty\}$$

$${}^{\infty+}A = \{x \mid f_A(x) > \infty\}$$

Yukarıdaki eşdeğerliklerden de anlaşılacağı gibi puslu bir A kümesinin ∞ -kesiği, X konuşma evreninin, A 'daki üyelik dereceleri belirli bir ∞ değerine eşit ya da ondan daha büyük elemanlarını içeren klasik bir küme durumundayken güçlü ∞ -kesiği, X 'in, A 'daki üyelik dereceleri belirli bir ∞ değerinden daha büyük elemanlarını içeren klasik bir kümedir⁶³. Buna göre güçlü ∞ -kesiği kümesi, ∞ -kesiği kümesinin bir altkümesi olmaktadır. Aşağıdaki grafik puslu bir kümenin horizontal görünüşü olup ∞ -kesiklerine bağlı olarak taşıdığı klasik kümeleri göstermektedir⁶⁴:



Grafik 21. Puslu Bir Kümede ∞ -Kesiklerinin Belirlediği Klasik Kümeler

Grafikte de gösterildiği gibi $[0, 1]$ birim aralığı içerisinde n sayıda ∞ -kesiği ya da güçlü ∞ -kesiği alınabileceğine göre teorik olarak puslu bir kümeden n sayıda klasik küme çıkartılabilmesi mümkündür⁶⁵.

⁶² Klir, Yuan, **a.g.e.**, s. 19.

⁶³ **A.e.**

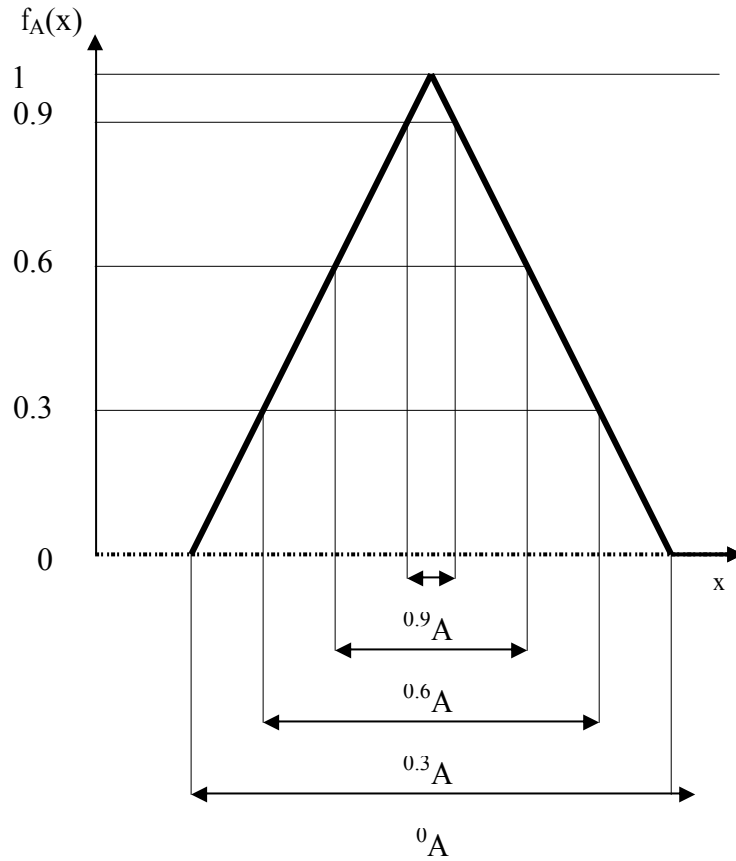
⁶⁴ Dubois, Ostasiewicz, Prade, **a.g.e.**, s. 45.

⁶⁵ Şen, **a.g.e.**, s.115. Şen “ ∞ -kesiği” yerine “lamda kesimi (λ)” tabirini kullanmaktadır.

Örnek olarak A'nın X üzerindeki bir puslu küme olduğu durum için, $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ iken $A=\{1/a, 0.9/b, 0.6/c, 0.3/d, 0.01/e, 0/f\}$ ise $\alpha=\{0.9, 0.6, 0.3, 0\}$ kümesi için ${}^\alpha A$ ve ${}^{\alpha+} A$ klasik kümeleri şu şekildedir⁶⁶:

$$\begin{aligned} {}^{0.9}A &= \{a, b\}, \quad {}^{0.6}A = \{a, b, c\}, \quad {}^{0.3}A = \{a, b, c, d\}, \quad {}^0A = \{a, b, c, d, e, f\} \\ {}^{0.9+}A &= \{a\}, \quad {}^{0.6+}A = \{a, b\}, \quad {}^{0.3+}A = \{a, b, c\}, \quad {}^{0+}A = \{a, b, c, d, e\} \end{aligned}$$

$\alpha=\{0.9, 0.6, 0.3, 0\}$ kümesi için α -kesikleri grafik üzerinde şu şekilde gösterilirler⁶⁷:



Grafik 22. Bir Puslu Küme Üzerindeki α -Kesikleri

α -kesikleri yukarıda örneği verilmiş olan tek bir puslu küme üzerinde alınabileceği gibi puslu bir bağıntı kümesi üzerinde de alınabilir. Örnek olarak R'nin,

⁶⁶ Bkz.: Şen, a.g.e., s.115-116.

⁶⁷ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 116.

üçer elemanlı iki puslu kümenin ortaya koyduğu bir puslu bağıntı kümesi; matrisle gösteriminin ise aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım:

$$\begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.9 \end{array} \right] \end{array}$$

Böyle bir puslu bağıntı kümesinin $\infty = \{1, 0.4, 0\}$ kümesine göre ∞ -kesiği matrisleri sırasıyla şu şekilde gösterilecektir⁶⁸:

$${}^1R \quad \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$${}^{0.4}R \quad \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$${}^0R \quad \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Yukarıda ∞ -kesikleri için yapılmış gösterimler aynı yöntemle güçlü ∞ -kesikleri için de yapılabilirler.

⁶⁸ Bkz.: Şen, a.g.e., s. 116-117.

SONUÇ

Puslu mantığın diğer mantıksal sistemlerle karşılaştırıldığında çok yeni bir teori oluşu, onun incelenmesi aşamasında bir takım güçlüklerle karşılaşılmasına neden olmaktadır. Yeni olmanın getirdiği en önemli sorunlardan birisi bazı konularda henüz terminolojinin tam olarak yerleşmemiş oluşudur. Bu sorun özellikle üzerinde yakın zamana kadar çok fazla durulmamış olan puslu mantığın felsefi temellerine ilişkin çalışmalarda daha belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Bir diğer sorun puslu mantığın ele alınış tarzıyla ilgilidir ve özellikle felsefecileri ve sosyal bilimcileri ilgilendirmektedir. Ortaya çıktığı günden itibaren özellikle teknik alandaki uygulamalarıyla ön plana çıkmış olan puslu mantık, daha ziyade mühendislerin ve matematikçilerin ilgi alanı içerisinde değerlendirilmiş, bu da onun teknik alanlardaki uygulamalarıyla ön plana çıkmasına ve felsefi ve mantık sorunlarıyla ilgili yönlerinin büyük ölçüde göz ardı edilmesine sebep olmuştur. Bunda puslu mantığın kurucusu Zadeh ve onun çoğu takipçisinin mühendis kökenli oluşunun şüphesiz büyük etkisi vardır. Halbuki puslu mantık, sadece bir mantık teorisi değil, önerdiği bakış açısı ile bilimsel paradigmanın temellerini sarsacak kadar güçlü bir alternatif görüş durumundadır. Bu bağlamda puslu teoriyle ortaya konan görüşün felsefede, özellikle ontoloji ve epistemoloji alanlarında, fizik nesne, dil ve doğruluk gibi felsefenin önemli sorunlarının değerlendirilişinde ciddi bir açılım yaratabileceğini düşünmek yanlış değildir¹.

Konunun görebildiğimiz kadarıyla sosyal bilimcileri ilgilendiren iki yönü vardır. Bunlardan ilki fizik bilimlerle karşılaştırıldıklarında sosyal bilimlerin ürettiği “bilgi”nin katiyeti konusunda karşı karşıya kalınan sorunla ilgilidir. Puslu mantığın ileri sürdüğü derecelilik kavramının katiyet karşısındaki etkinliği, sosyal bilimlere bakışı değiştirebilecek, felsefecilerin katkılarıyla bu kavramı esas alan gelişmiş bir epistemolojinin ortaya konulması ise sosyal bilimlerin bilim dünyasındaki yerinin yeniden sorgulanması gerekecektir. İkinci ve daha teknik husus, sosyal bilimlerin sıklıkla kullandığı istatistik gibi bir takım ölçme ve değerlendirme yöntemleri ile

¹ Bu konularla ilgili daha geniş bilgi için **Bkz.:** Şafak Ural, “Puslu Mantık: Felsefe İçin Yeni Bir Açılım Olabilir mi?”, **Prof. Dr. Süleyman Hayri Bolay Armağan Kitabı**, Ed. Ayşe Yağmur, Ankara, Gazi Kitabevi, 2005. s. 155-165.

ilgilidir. Bu yöntemlerin pusluluk açısından ele alınmasıyla ortaya çıkan ve çalışmamız içerisinde de kısmen değindiğimiz bazı yeni yöntemler sosyal bilimlerin tabiatına çok daha uygun görünmekte, bir bilim olarak donanımlarını güçlendirecek olması açısından büyük önem taşımaktadırlar.

Bu iddialardan yola çıkarak hazırlanmış olan bu tez çalışması umarız felsefecilerin ve sosyal bilimcilerin dikkatlerini bu konuya yoğunlaştırmalarına vesile olacaktır. Bilinmelidir ki puslu mantık teorisi ancak bu alanlarda yapılacak çalışmalarla sağlam bir alt yapıya kavuşabilecek, düşünce dünyasında köklü bir dönüşüm gerçekleştirebileceğini düşündüğümüz bu potansiyel kendisini ancak böyle bir zeminde ortaya koyabilecektir.

Kaynakça

- Baturone, Illuminada, v.d.: **Microelectronic Design of Fuzzy Logic-Based Systems**, USA, CRC Press, 2000.
- Bojadziev, George, Bojadziev, Maria: **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications**, Singapore, World Scientific, 1996.
- Buckley, James J., Eslami, Esfandiar: **An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets**, Germany, Physica-Verlag, 2002.
- Dubois, Didier, Prade, Henri, Klement, Erich P.: "Introduction: Bridging The Gap Between Multiple-Valued Logics, Fuzzy Logic, Uncertain Reasoning and Reasoning About Knowledge", **Fuzzy Sets, Logics and Reasoning About Knowledge**, Ed. Didier Dubois, Henri Prade, Erich P. Klement, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1999, s. 1-7.
- Dubois, Didier, Ostasiewicz, Walenty, Prade, Henri: "Part I Fuzzy Sets: History and Basic Notions", **Fundamentals of Fuzzy Sets**, Ed. Didier Dubois, Henri Prade, USA, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- Gupta, Madan M.: "Cognition, Perception and Uncertainty", **Fuzzy Computing: Theory, Hardware, and Applications**, Ed. Madan M. Gupta, Takeshi Yamakawa, Netherlands, Elsevier Science Publishers B.V., 1988, s. 3-6.
- Hughes, George E., Londey, David G.: **The Elements of Formal Logic**, 2. bs., London, Presented by British Council, 1966.
- Husch, Lawrence S.: "Visual Calculus", 2001, (Çevrimiçi) <http://www.archives.math.utk.edu/visual.calculus>, 2 Aralık 2004.
- Klir, George J., Yuan, Bo: **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, USA, Prentice Hall, 1995.
- Kosanovic, Bogdan R.: "Fuzziness and Probability, (Çevrimiçi), <http://www.neuronet.pitt.edu/~bogdan/research/fuzzy/fvsp/fvsp.html>, 12 Haziran 2005.
- Kosko, Bart, Isaka, Satoru: "Fuzzy Logic", (Çevrimiçi) [http://sipi.usc.edu/~kosko/Scientific%20 American.pdf](http://sipi.usc.edu/~kosko/Scientific%20American.pdf), 12 Haziran 2005.

- Monjallon, Albert: **An Introduction to Modern Mathematics**, Çev. Peter Fantham, Edinburgh and London, Oliver & Boyd Ltd., 1967.
- Novak, Vilem: “Fuzzy Logic”, **Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems**, Ed. Dov M. Gabby, Philippe Smets, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1998, s. 75-109.
- Ostasiewicz, Walenty: “Pioneers of Fuzziness”, (Çevrimiçi)
http://www.univ-savoie.fr/Portail/Groupe/LISTIC/busefal/Papers/46.zip/46_01.pdf, 10 Haziran 2005.
- Regriş, Mircea, Roventa, Eugene: **Classical and Fuzzy Concepts in Mathematical logic and Applications**, USA, CRC Press, 1998.
- Russell, Bertrand: “Vagueness”, (Çevrimiçi)
<http://cscs.umich.edu/~crshalizi/Russell/vagueness>, 13 Mayıs 2005.
- Şen, Zekai: **Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri**, İstanbul, Bilge Kültür Sanat, 2001.
- Tarski, Alfred: **Introduction to Logic**, Düzenlenmiş 2.bs., New York, Oxford University, 1946.
- Tiles, Mary: **The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise**, USA, Courier Dover Publications, 2004.
- Ural, Şafak: “Puslu Mantık: Felsefe İçin Yeni Bir Açılım Olabilir mi?”, **Prof. Dr. Süleyman Hayri Bolay Armağan Kitabı**, Ed. Ayşe Yağmur, Ankara, Gazi Kitabevi, 2005. s. 151-169.
- Ural, Şafak: **Temel Mantık**, genişletilmiş 2. bs., İstanbul, Çantay Kitabevi, 1995.
- Yager, Ronald R., Filev, Dimitar P.: **Essential of Fuzzy Modeling and Control**, USA, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- Yen, John: “Fuzzy Logic-A Mordern Perspective”, (Çevrimiçi)
<http://www.cs.plu.edu/courses/csce330/arts/fuzzy1.pdf>, 11 Haziran 2005.

- Yüksel, Yücel: ““Bağıntı” Kavramının Mantık ve Felsefe Açısından İncelenmesi”, (yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Danışman: Prof. Dr. Şafak Ural, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Anabilim Dalı, Mantık Bilim Dalı, 2001.
- Zadeh, Lotfi A.: “A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges”, **Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. R. R. Yager, S. Ovchinnikov, R. M. Tong, H. T. Nguyen, John Wiley & Sons, USA, 1987, s. 467-498.
- Zadeh, Lotfi A.: “Calculus of Fuzzy Restrictions”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 210-237.
- Zadeh, Lotfi A.: “Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competitive”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 805-810.
- Zadeh, Lotfi A.: “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 19-34.
- Zadeh, Lotfi A.: “Fuzzy Sets”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 395-432.
- Zadeh, Lotfi A.: “Knowledge Representation in Fuzzy Logic”, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic And Fuzzy Systems:Selected Papers by Lotfi A. Zadeh**, Ed. George J. Klir, Bo Yuan, Singapore, World Scientific, 1996, s. 764-774.
- Zadeh, Lotfi A.: “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic”, **Int. J. General Systems**, Gordon and Breach Science Publishers S.A., UK, vol.17, 1990, s.95-105.

ÖZGEÇMİŞ

Yücel YÜKSEL 1973 yılında İstanbul’da doğdu. İlk ve ortaöğrenimini İstanbul’da, sırasıyla İbn-i Sina İlkokulu, Bakırköy Şekerevler Ortaokulu ve Bakırköy Lisesi’nde tamamladı. 1991-1993 yılları arasında Ankara Üniversitesi Kastamonu M.Y.O.’da Bilgisayar Programcılığı öğrenimi gördü. Mimar Sinan Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Sosyoloji Bölümü’nde 1993 yılında başladığı lisans öğrenimini 1997 yılında tamamlayışının ardından İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Anabilim Dalı yüksek lisans programına kayıt oldu. 1998 yılında İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü’ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2001 yılında Mantık Bilim Dalında “Bağıntı Kavramının Mantık ve Felsefe Açısından İncelenmesi” başlıklı yüksek lisans tezini tamamladı. Halen Felsefe Bölümü Mantık Anabilim Dalı’nda çalışmalarına devam etmekte olan YÜKSEL evli ve bir çocuk babasıdır.