

T.C.

İstanbul Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

İktisat Teorisi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Kuadratik Programlama Tabanlı Modelleme Yardımı ile
Portföy Optimizasyonu ve İMKB-30 Portföy Oluşturma
Uygulaması

Murat Beşer

2501020170

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Abdulkadir Mercül

İstanbul 2005

ÖZ

Kuadratik programlama tabanlı portföy oluşturma yönteminin incelendiği bu çalışmada üç ana bölüm yer almaktadır. İlk bölümde doğrusal olmayan programlama teorisi incelenmiştir. Çalışma konumuzun temelini oluşturan ikinci bölümde; portföy oluşturma kriterleri, Markowitz ve Sharpe yöntemleri incelenmiştir. Son bölümde ise çalışmamızın teorik kısmının uygulamasına yer verilmiştir.

ABSTRACT

In this work there are three chapters in which researching quadratic programming based portfolio optimization method. In the first chapter nonlinear programming theory is researched. In the second chapter which constitutes the main part of the work, portfolio constitution criteria, Markowitz and Sharpe methods are researched. In the last chapter application of theoretic part of the work is discussed.

İÇİNDEKİLER

ÖZ (ABSTRACT).....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİL VE TABLO LİSTESİ.....	vi
GİRİŞ.....	1
BİRİNCİ BÖLÜM:DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA.....	3
1. KISIT İÇERMEYEN OPTİMİZASYON.....	3
1.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar.....	3
1.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlar.....	5
1.3. Pozitif Ve Negatif Tanımlı Matrisler.....	8
2. KISIT ALTINDA OPTİMİZASYON.....	9
2.1. Konveks Küme Ve Konveks Fonksiyonlar.....	9
2.1.1. Konveks Küme.....	10
2.1.2. Konveks Fonksiyon.....	11
2.2. Konveks Programlama Ve Karush Kuhn Tucker Şartları.....	13
2.2.1. Ayırma Teoremi.....	14
2.2.2. Destek Teoremi.....	15
2.2.3. Konveks Programlama.....	16
2.2.4. Kuadratik Programlama.....	19

İKİNCİ BÖLÜM: PORTFÖY SEÇİM MODELİ	21
1. PORTFÖY SEÇİM PROBLEMİ	21
2.PORTFÖY GETİRİSİ VE RİSKİ	22
2.1.Portföy Getirisi	23
2.2. Sistematik Ve Sistematik Olmayan Risk	24
2.3. Varlık Risklerinin Etkileşimi	25
3. İKİ VE İKİDEN ÇOK VARLIK İÇEREN PORTFÖY	30
3.1. İki Varlık İçeren Portföy	30
3.2. İkiden Fazla Varlık İçeren Portföy	34
3.2.1. Minimum Risk Noktası	36
3.2.2. Markowitz Etkinlik Sınırı	37
3.3. Risksiz Varlık İçeren Portföy	39
3.3.1. Sermaye Piyasası Doğrusu Denklemi	42
3.4. Tekli İndeks Modeli	44
3.5. Optimum Portföyün Bulunması (Elton-Gruber Yöntemi)	47
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM: İMKB-30 UYGULAMASI	49
SONUÇ	56
KAYNAKÇA	58
EK	61

ŞEKİL ve TABLO LİSTESİ

Şekil 1.1 Eğer noktasına sahip fonksiyon.....	9
Şekil 1.2 Konveks ve konveks olmayan kümeler.....	10
Şekil 1.3 Konveks kombinasyonu.....	11
Şekil 1.4 Konveks fonksiyona, üzerindeki bir noktadan çizilen teğet.....	12
Şekil 1.5 Konveks fonksiyon.....	12
Şekil 1.6 y noktasını C konveks kümesinden ayıran hiperdüzlem.....	14
Şekil 1.7 Kapalı konveks kümeye teğet olan hiperdüzlem.....	15
Şekil 2.1. İki varlık arasındaki korelasyon katsayısının sıfır olduğu durum.....	26
Şekil 2.2. İki varlık arasındaki korelasyon katsayısının bire eşit olduğu durum.....	28
Şekil 2.3. İki varlık arasındaki korelasyon katsayısının eksi bire eşit olduğu durum.....	29
Şekil 2.4. İki varlıklı portföyün tam ve tam negatif korelasyon durumları.....	31
Şekil 2.5. İki varlıklı portföyde tam ve tam negatif arasındaki korelasyon durumları.....	33
Şekil 2.6. Ağırlık uzayından risk-beklenen uzayına fonksiyon.....	35
Şekil 2.7. Risksiz varlık içeren portföy ve sermaye piyasası doğrusu.....	41
Tablo 3.1. İMKB-30’da işlem gören hisse senetleri.....	50
Tablo 3.2. İMKB-30 verilerinin analizi.....	52
Tablo 3.3. Sonuçlar.....	55

GİRİŞ

İktisadi varlık olarak betimlenen modern birey tasarruflarını, gelecekle ilgili belirsizliklerin olumsuz etkilerinden korumak için çeşitli yatırım araçlarına yönlendirme zorunluluğu hissetmektedir. Bu yatırım araçları banka faizi, tahvil, repo gibi risksiz yatırım araçları olabileceği gibi, hisse senedi, döviz gibi riskli yatırım araçları da olabilir.

Riskli yatırım araçlarına yatırım yapacak birey için önünde ki en önemli sorun, yatırımının niteliğine göre değişen riskin nasıl minimum seviyesine indirileceğidir.

Hisse senedi piyasası açısından, tek bir hisse senedi yerine birden fazla hisse senedine yatırım yapmak riski minimize etmede uygulanacak en önemli yoldur. Bireyin riske katlanma seviyesine göre hisse senedi çeşitliliği de değişim gösterecektir. Bu durum da yatırımcıya kendine en uygun hisse senedi çeşitlendirmesini seçme şansı verir.

Bu tezde İMKB-30 da işlem gören hisse senetleri için minimum risk maksimum getiri sağlayan portföylerin elde edilmesi çalışılmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde doğrusal olmayan programlamanın matematiksel temelleri gösterilmiştir. Bu temeller kapsamında ilk olarak, kısıt içermeyen optimizasyon incelenmiş, daha sonra amaç fonksiyonu olarak belirlenen temel fonksiyonun çeşitli kısıt durumları altında, maksimizasyon ve minimizasyon şartları gösterilmiştir. Son olarak da doğrusal olmayan programlamanın özel durumu olarak kuadratik programlama incelenmiştir. İkinci bölümde ilk olarak, riskli varlıklar içeren portföyler için risk minimizasyonunun ne şekilde elde edileceği incelenmiştir. Bir sonraki adımda, portföy içinde risksiz varlıkların bulunması

durumunda, portföy riskinin hangi yollarla minimize edildiği gösterilmiştir. Son olarak da pazarın getirisi ile tekil varlığın getirisi arasındaki ilişki ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise ilk iki bölümde teorik olarak incelenen konunun İMKB-30 uygulaması yapılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

1. KISIT İÇERMEYEN OPTİMİZASYON

1.1 Tek Değişkenli Fonksiyonlar

Bu alt bölümde herhangi bir kısıta tabi olmayan ve belli bir aralıkta tanımlanan tek değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların ilgili aralıkta maksimum ve minimumları incelenecektir. İlgili sonuçlar analizde Taylor formülü ile adlandırılan teorem yardımı ile elde edilmektedir.

Teorem 1.1.1 : $f(x)$, $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ kapalı aralığında tanımlı, ikinci dereceden türevlenebilir tek değişkenli fonksiyon olsun. x^* ve x , $[a, b]$ kapalı aralığı içinde keyfi iki nokta olarak tanımlarsak, üçüncü bir nokta olan z 'yi bu iki nokta arasındaki keyfi bir değer olarak seçebiliriz.

$f(x)$ fonksiyonunu Taylor teoremi yardımıyla, x^* noktası civarında açarsak

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} f''(z)(x - x^*)^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.¹

Yukarıdaki formül, optimizasyon hesabında oldukça kullanışlıdır. Bunun nedeni, x^* noktasını fonksiyonun maksimum veya minimum noktası olarak alıp, ilgili

¹ Anthony PERESSINI, Francis SULLIVAN, J.J. UHL, **The Mathematics of Nonlinear Programming**, New York, Springer-Verlag, 1988, s.1-2.

sonucu yukarıdaki denkleme eklersek, bütün $x^* \neq x$ için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$f(x) = f(x^*) + 0 + \text{reel sayı}$$

Elde ettiğimiz son eşitsizliğin sağ tarafındaki reel sayının pozitif veya negatifliğine göre x^* değerinin fonksiyonu ne şekilde belirlediği çıkarılabilir. Buna göre,

$f(x) = f(x^*) + 0 + \text{pozitif reel sayı} : x^*$, fonksiyonu minimize eden değerdir.

$f(x) = f(x^*) + 0 + \text{negatif reel sayı} : x^*$, fonksiyonu maksimize eden bir değerdir.

Teorem 1.1.2 : $f(x), f'(x), f''(x)$ fonksiyonları, üzerinde tanımlandıkları I aralığında sürekli ve $x^* \in I$, ilgili fonksiyonun kritik noktası olsun. Buna göre,

- a) Her $x \in I$ için, $f''(x) \geq 0$ durumu gerçekleşiyorsa, x^* ilgili aralık üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için global minimumdur.
- b) Her $x \in I$ için, $x \neq x^*$ şartı doğrultusunda $f''(x) > 0$ gerçekleşiyorsa, x^* ilgili aralık üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için kesin global minimumdur.
- c) ε pozitif bir sayı, $x^* \pm \varepsilon < x$ şartını sağlayan her $x \in I$ için $f(x^*) < f(x)$ gerçekleşiyorsa kesin global minimumdur.
- d) Her $x \in I$ için, $f''(x) \leq 0$ durumu gerçekleşiyorsa, x^* ilgili aralık üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için global maksimumdur.

- e) Her $x \in I$ için, $x \neq x^*$ şartı doğrultusunda $f''(x) < 0$ gerçekleşiyorsa, x^* ilgili aralık üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için kesin global maksimumdur.²

1.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Bu alt bölümde amaç, birinci kesimde elde edilen sonuçları birden fazla değişkene sahip olan fonksiyonlara yaymaktır. Ancak tek değişkenli analizde kullanılan yöntemler tek başına yeterli olmamakta, lineer cebir de ek olarak kullanılmaktadır.

Teorem 1.2.1 : $f(x)$ fonksiyonu $D \in \mathbb{R}^n$ bölgesi üzerinde tanımlansın. Bu D bölgesi üzerindeki x^* noktası için aşağıdaki çıkarsamalar yapılabilir.

- a) Her $x \in D$ için $f(x^*) \leq f(x)$ şartı gerçekleşiyorsa, x^* D üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için global minimumdur.
- b) Her $x \in D$ için, $x \neq x^*$ şartı doğrultusunda $f(x^*) < f(x)$ gerçekleşiyorsa, x^* D üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için kesin global minimumdur.
- c) ε pozitif bir sayı, her $x \in D$ için $x \in B(x^*, \varepsilon)$ açık yuvarı üzerinde $f(x^*) \leq f(x)$ sağlanıyorsa lokal minimumdur.
- d) Her $x \in D$ için $f(x^*) \geq f(x)$ şartı gerçekleşiyorsa, x^* D üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için global maksimumdur.
- e) Her $x \in D$ için, $x \neq x^*$ şartı doğrultusunda $f(x^*) > f(x)$ gerçekleşiyorsa, x^* D üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için kesin global maksimumdur.

² Tom APOSTOL, **Calculus**, John Wiley & Sons, 1. cilt, 1967, s.189., Sterling BERBERIAN, **A First Course in Real Analysis**, Springer-Verlag, 1994, s.128.

Teorem 1.2.2 : $f(x)$ fonksiyonu, ikinci dereceden türevlenebilen ve $D \subset R^n$ bölgesi üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyon olsun. x ve $x^* \in D$ için $[x, x^*] = \{z \in R^n : z = x^* + t(x - x^*); 0 \leq t \leq 1\}$ şartını sağlayan doğru parçası D açık kümesinin içindedir ve $z, [x, x^*]$ kapalı aralığında keyfi bir noktadır.

Teorem 1.1.1 de tek değişkenli fonksiyon için yaptığımız Taylor açılımını yukarıda ki teoremi dikkate alarak çok değişkenli fonksiyonda x^* noktasına göre genelleştirirsek,

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} Hf(z)(x - x^*)^2$$

eşitliğini elde ederiz.

Teorem 1.2.3 : x^*, R^n üzerinde ikinci dereceden türevlenebilen $f(x)$ fonksiyonunun kritik değeri olsun. Buna göre,

a) Her $x \in R^n$ ve $z \in [x, x^*]$ için, $(x - x^*)^t + \frac{1}{2} Hf(z)(x - x^*)^2 \geq 0$ ise $x^*, f(x)$ fonksiyonu için global minimumdur.

b) Her $x \in R^n, x^* \neq x$ ve $z \in [x, x^*]$ için $(x - x^*)^t + \frac{1}{2} Hf(z)(x - x^*)^2 > 0$ ise, $x^* f(x)$ fonksiyonu için kesin global minimumdur.

c) Her $x \in R^n$ ve $z \in [x, x^*]$ için, $(x - x^*)^t + \frac{1}{2} Hf(z)(x - x^*)^2 \leq 0$ ise $x^*, f(x)$ fonksiyonu için global maksimumdur.

d) Her $x \in R^n, x^* \neq x$ ve $z \in [x, x^*]$ için $(x - x^*)^t + \frac{1}{2} Hf(z)(x - x^*)^2 < 0$ ise, $x^* f(x)$ fonksiyonu için kesin global maksimumdur.³

³ Alpha C. CHIANG, **Fundamental Method of Mathematical Economics**, McGraw-Hill, 1994, s.317.

Yukarıdaki teorem global maksimum ve global minimum un bulunmasında pratik bir yol değildir. Hessian matrisi bize daha kritik bir değer sağlamaktadır. Buna göre $n \times n$ simetrik şeklinde olan Hessian matrisi $Q_A(y) = y^t A y$ şeklinde gösterebileceğimiz kuadratik bir yapıya sahiptir. İlgili kuadratik yapının işaretine göre fonksiyonun maksimum veya minimum olup olmadığı belirlenebilir.

Teorem 1.2.4 : A , $n \times n$ simetrik matris ve $Q_A(y) = y^t A y$, A matrisinin kuadratik biçimi olsun . Buna göre,

- a) Her $y \in R^n$ ve $Q_A(y) = y^t A y \geq 0$ ise pozitif yarı tanımlıdır.
- b) Her $y \in R^n$ ve $Q_A(y) = y^t A y > 0$ ise pozitif tanımlıdır.
- c) Her $y \in R^n$ ve $Q_A(y) = y^t A y \leq 0$ ise negatif yarı tanımlıdır.
- d) Her $y \in R^n$ ve $Q_A(y) = y^t A y < 0$ ise negatif tanımlıdır.
- e) Bazı $y \in R^n$ için $Q_A(y) = y^t A y > 0$ ve geri kalan $y \in R^n$ için $Q_A(y) = y^t A y < 0$ ise tanımsızdır.⁴

Teorem 1.2.4' ü teorem 1.2.3 yardımı ile aşağıdaki şekilde yeniden formüle edersek.

Teorem 1.2.5 : x^* noktası ikinci dereceden türevlenebilen $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası ve $Hf(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun Hessian matrisi olsun. Bu şartlar altında x^* ,

- a) $Hf(x)$, R^n üzerinde pozitif yarı tanımlı ise, $f(x)$ için global minimumdur.

⁴ Bernard KOLMAN, David R. HILL, **Uygulamalı Lineer Cebir**, Çev. Prof. Dr. Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2002, s.204.

- b) $Hf(x)$, R^n üzerinde pozitif tanımlı ise, $f(x)$ için kesin global minimumdur.
- c) $Hf(x)$, R^n üzerinde negatif yarı tanımlı ise, $f(x)$ için global maksimumdur.
- d) $Hf(x)$, R^n üzerinde negatif tanımlı ise, $f(x)$ için kesin global maksimumdur.

1.3 Pozitif ve Negatif Tanımlı Matrisler

Bu alt bölümde matrislerin pozitif, negatif ve yarı tanımlılıklarının nasıl elde edileceği incelenecektir. Bunu yaparken iki testten yararlanabiliriz. Bunlar sırasıyla determinant ve özdeğerlerin incelenmesidir.

Teorem 1.3.1 : A , $n \times n$ simetrik matris ve Δ_k , A matrisinin k . minörü olsun. $1 \leq k \leq n$

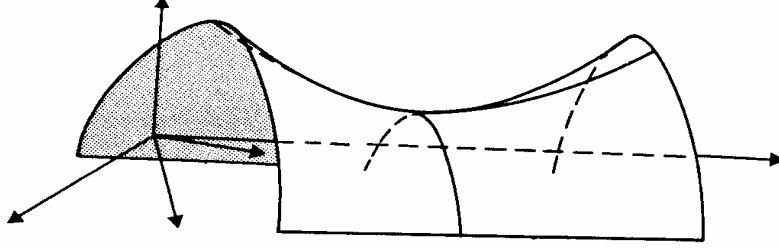
- a) $k = 1, \dots, n$ değerleri için, $\Delta_k > 0$ ise A matrisi pozitif tanımlıdır.
- b) $k = 1, \dots, n$ değerleri için $(-1)^k \Delta_k > 0$ ise A matrisi negatif tanımlıdır.⁵

Teorem 1.3.2 : $f(x)$, ikinci dereceden türevi $D \subset R^n$ üzerinde tanımlı fonksiyon, x^* , $D \subset R^n$ bölgesinde bir iç nokta ve $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası olsun. Hessian $Hf(x)$ tanımsız ise x^* noktası $f(x)$ fonksiyonunun eğer noktası olarak kabul edilir.

Aşağıdaki Şekil 1, eğer noktasına sahip bir fonksiyonun görüntüsüdür.

Determinant testinden başka, ilgili simetrik matrisin özdeğerlerinden yararlanarak da matrisin pozitif, negatif veya yarı tanımlı olup olmadığı bulunabilir.

⁵ CHIANG, a.g.e. ,s.336.



ŞEKİL 1.1

Teorem 1.3.3 : A , $n \times n$ simetrik matris olsun, buna göre,

- a) A matrisinin özdeğerlerinin tümü pozitif ise, pozitif tanımlıdır.
- b) A matrisinin özdeğerlerinin tümü negatif değil ise pozitif yarı tanımlıdır.
- c) A matrisinin özdeğerlerinin tümü negatif ise, negatif tanımlıdır
- d) A matrisinin özdeğerlerinin tümü pozitif değil ise, negatif yarı tanımlıdır
- e) A matrisi içinde en az bir negatif ve en az bir pozitif özdeğer varsa, tanımsızdır.

2. KISIT ALTINDA OPTİMİZASYON

2.1 Konveks Küme ve Konveks Fonksiyonlar

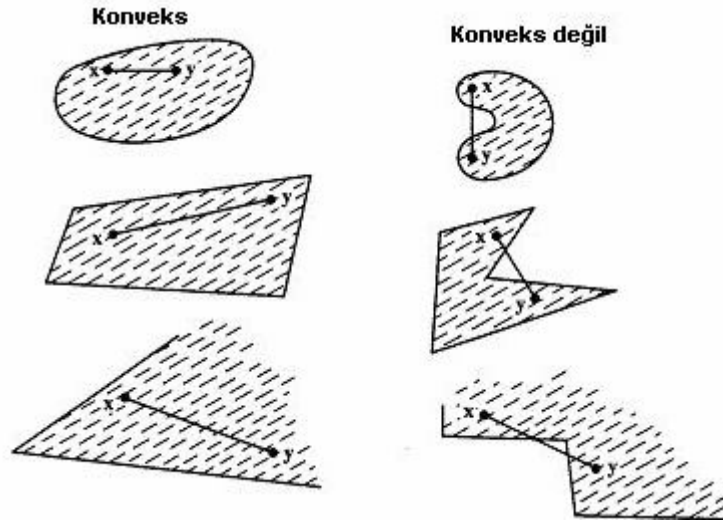
Konveks fonksiyonlar istatistiki, iktisadi ve endüstriyel uygulamalarda ortaya çıkan pek çok optimizasyon probleminde görülür. Bunun dışında konvekslik varsayımı, fonksiyonların Hessian matrislerinin tiplerini inceleme zorluğundan kurtardığı gibi doğrusal olmayan programlamanın merkezini oluşturur.

2.1.1 Konveks Küme

Teorem 2.1.1.1 : $C \in R^n$ nin iç noktası olan her x ve y için, bu noktaları birleştiren doğru parçası ilgili C bölgesinin içinde kalıyorsa konveks kümedir.

x ve y noktalarını birleştiren doğru parçasının denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.⁶

$$[x, y] = \{y + \lambda(y - x); 0 \leq \lambda \leq 1\}$$



Şekil 1.2

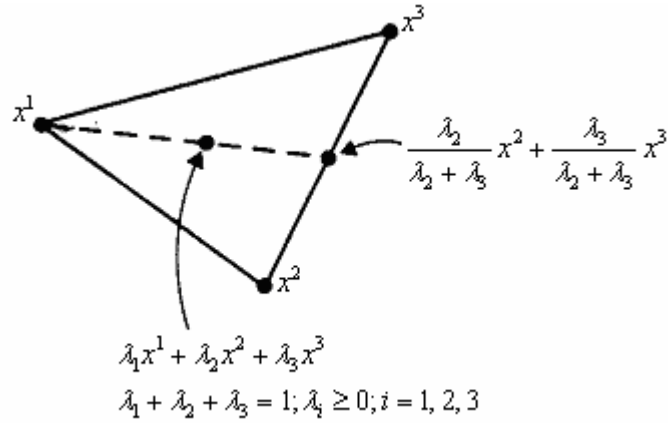
Teorem 2.1.1.2 : $x^* \in R^n$ ve $\alpha \in R$ için $F^+ = \{y \in R^n : x^* y \geq \alpha\}$ veya $F^- = \{y \in R^n : x^* y \leq \alpha\}$ kümeleri kapalı yarı uzay olarak tanımlanır.⁷

$C_1, C_2, \dots, C_n$ kümelerini R^n de konveks küme olarak alırsak, bu konveks kümelerin kesişimi de konveks küme olur.

⁶ Christodoulos A. FLOUDAS, **Nonlinear and Mixed-Integer Optimization**, New York, Oxford Press, 1995, s.20., Olvi L. MANGASARIAN, **Nonlinear Programming**, SIAM, 1994, s.39.

⁷ FLOUDAS, a.g.e., s.18.

Teorem 2.1.1.3 : $C, \mathbb{R}^n$ uzayında konveks bir küme ve $x_1, \dots, x_k \in C$ olsun. Eğer $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ toplamı bir olan ve negatif olmayan sayılar ise, $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ ile ifade edilen konveks kombinasyon da C bölgesi içindedir.



Şekil 1.3

2.1.2 Konveks Fonksiyon

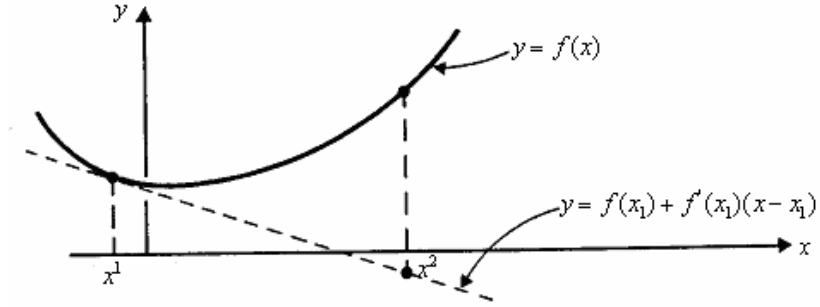
Teorem 2.1.2.1 : $f(x)$, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. İlgili fonksiyonun konveks olması için yeter şart, grafik üzerinde keyfi iki noktayı birleştiren çizginin fonksiyonun üzerinde olmasıdır.

Teorem 2.1.2.2 : (a, b) aralığı üzerinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu konveks özelliğine sahipse, $f(x)$ bu aralık üzerinde sürekli.

Konveks fonksiyonlarla ilgili diğer önemli çıkarsama, I aralığı üzerinde tanımlı ve türevlenebilen $f(x)$ fonksiyonuna, üzerindeki keyfi bir noktadan çizilen

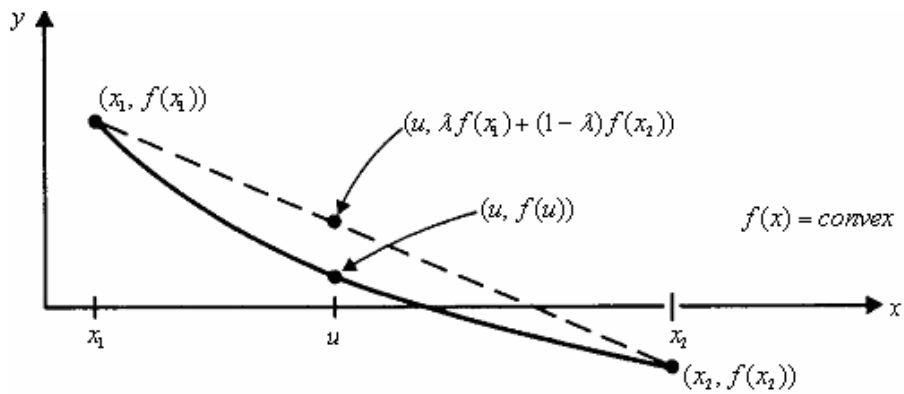
teğetin daima ilgili fonksiyonun altında kalacağıdır. Bu ifadeyi aşağıdaki şekilde yazabiliriz,⁸

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2)$$



Şekil 1.4

Teorem 2.1.2.3 : $f(x)$ reel değerli ve konveks C kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ eşitsizliği yazılır.⁹



Şekil 1.5

⁸ David LUENBERGER, **Introduction to Linear and Nonlinear Programming**, Addison Wesley Publishing Company, 1973, s.117.

⁹ S. VAJDA, **Theory of Linear and Nonlinear Programming**, London, Longman, 1974, s.4., MANGASARIAN, a.g.e., s.59.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ negatif olmayan, toplamı 1'e eşit olan sayılar olmak şartı ile, yukarıda ki teoremin genel şekli, $f(\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x^i)$ olarak yazılır.

2.2 Konveks Programlama ve Karush Kuhn Tucker Şartları

Gerçek hayatla ilgili pek çok optimizasyon problemi, ilgili fonksiyonun maksimizasyonunu veya minimizasyonunu araştırırken konuyla ilgili pek çok kısıt durumu ile karşı karşıya kalmaktadır. İlgili kısıt durumlarını negatif değer almama, toplamı belli değerleri aşmama şeklinde örnekleyebiliriz. Bu tarz problemler kısıt altında optimizasyon problemleri olarak adlandırılmaktadır. Problemlerin genel biçimi aşağıda gösterilen şekilde yazabiliriz.¹⁰

$$\text{Minimize } f(x)$$

$$\text{Kısıtlar } g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m$$

Burada $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ fonksiyonlarını konveks fonksiyonlar olarak kabul edersek, ilgili problem konveks programlama adını alacaktır. Konveks programlamaya örnek olarak doğrusal programlama ve en küçük kareler problemleri gösterilir.

Konveks programlama yöntemini anlamada en önemli yol Karush Kuhn Tucker teoremidir. Bu teoremle, ilgili problem için minimumu sağlayan noktalar etkin şekilde bulunurken, aynı zamanda kısıtların genel yapıyı ne oranda etkiledikleri de incelenebilmektedir. Karush Kuhn Tucker teoremini oluşturmak için kullanılan yaklaşımlardan en önemlisi konveks kümeler için ayırma ve destek teoremleridir.

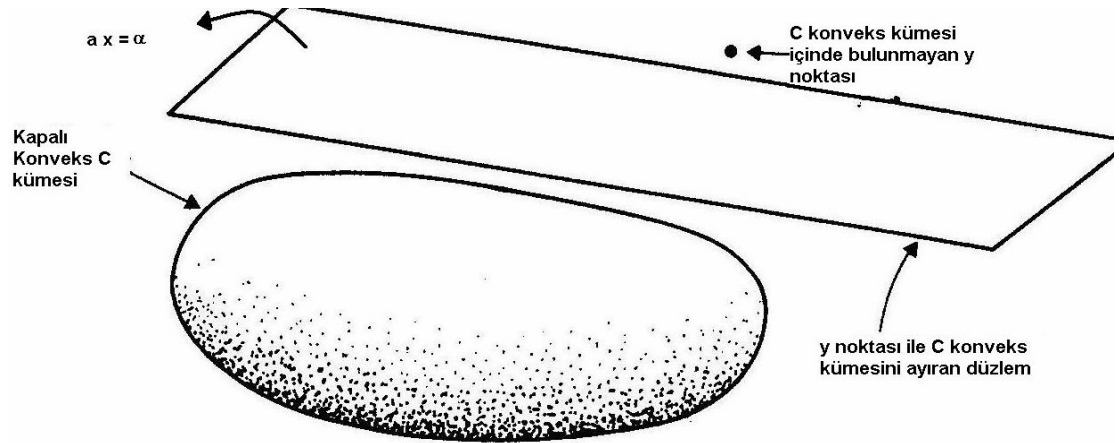
¹⁰ Wayne WINSTON, **Operation Research**, Thomson, 2004, s.670., David HIMMELBLAU, **Applied Nonlinear Programming**, McGraw-Hill Book Company, 1972, s.26.

2.2.1 Ayırma Teoremi

Teorem 2.2.1.1 : C , R^n üzerinde kapalı konveks bir küme ve y , C 'nin elemanı olmayan bir vektör olsun. $a \cdot x \leq \alpha \leq a \cdot y$ şartını sağlayan bir $a \in R^n$ vektörü ve α reel sayısı vardır.¹¹

Yukarıdaki teoremi, y noktası ve C konveks kümesi bir hiperdüzlem ile ayrılmaktadır şeklinde söyleyebiliriz. İlgili hiperdüzlemi $H = \{x \in R^n : ax = \alpha\}$ biçiminde yazarsak, konveks kümemiz $H^- = \{x \in R^n : ax \leq \alpha\}$ kapalı yarı uzayında kalırken, y noktası $H^+ = \{x \in R^n : ax > \alpha\}$ yarı uzayında kalacaktır.

Bu ifadenin önemi, R^n içinde bulunan kapalı konveks kümenin, ilgili kümeyi içeren tüm kapalı yarı uzayların kesişmesi sonucu ortaya çıktığını göstermesidir.



Şekil 1.6

¹¹ G. HADLEY, **Linear Algebra**, London, Addison-Wesley Publishing Company, 1961, s.210

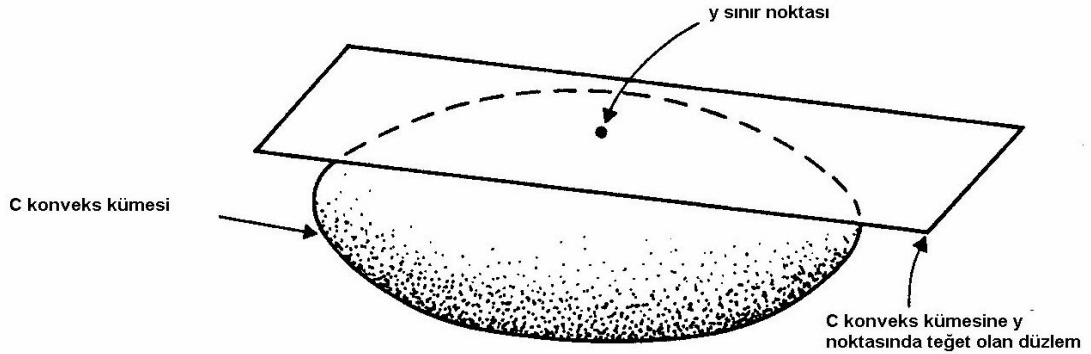
2.2.2 Destek Teoremi

Teorem 2.2.2.1 : C , R^n üzerinde kapalı konveks bir küme ve z ilgili konveks kümenin sınır noktası olsun. $a \cdot x \leq a \cdot z$ şartını sağlayan bir $a \in R^n$ vektörü vardır.

Yukarıdaki teoremi, kapalı konveks kümeye teğet olan hiperdüzlem, teğet olduğu noktadaki sınır elemanını içerir şeklinde söyleyebiliriz.¹²

Teorem 2.2.2.2 : $f(x)$, C kümesi üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $x^* \in C$ ise, $f(x) \geq f(x^*) + d(x - x^*)$ eşitsizliğini sağlayan bir d vektörü vardır.¹³

Yukarıdaki teorem Karush Kuhn Tucker teoremi açısından oldukça önemlidir. Bu teoreme göre, fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda bile ilgili noktaya teğet olabilecek bir d vektörü bulunabilir.



Şekil 1.7

¹² A. Wayne ROBERTS, Dale VARBERG, **Convex Functions**, Academic Press, 1973, s.85.

¹³ Dimitri P. Bertsekas, **Nonlinear Programming**, Athena Scientific, 1999, s.609., PERESSINI, a.g.e., s.167.

2.2.3 Konveks Programlama

Doğrusal olmayan programlama içinde en fazla gelişen alanlardan biri konveks programlamadır. Bu programlama türü, konveks fonksiyonların kısıt durumuna maruz kalan konveks fonksiyonu minimize etmek ile ilgilidir. Programlamanın genel yapısı,

$$\text{Minimize } f(x)$$

$$\text{Kısıtlar } g_1(x) \leq 0 \dots\dots\dots g_m(x) \leq 0$$

$$x \in C \subset R^n$$

$f(x)$, programımız içindeki amaç fonksiyonunu, $g_1(x) \leq 0 \dots\dots\dots g_m(x) \leq 0$ eşitsizlik fonksiyonları, kısıt durumlarını göstermektedir. Bütün kısıtları sağlayan $x \in C$ noktası, uygunluk noktası ve bütün uygunluk noktalarının oluşturduğu küme, uygunluk bölgesi olarak tanımlanır. Uygunluk bölgesi boş değilse, ilgili program tutarlı olarak adlandırılır.

Programlama içindeki tüm uygunluk noktaları için $f(x^*) \leq f(x)$ şartını sağlayan bir x^* noktası bulunursa, ilgili nokta programlamanın çözümü olarak adlandırılır. Eğer x gibi bir uygunluk noktası, $g_j(x) \leq 0$ şartını sağlıyorsa, programlama tam tutarlı olarak adlandırılır.

Verilen bir konveks programlamada, programlamayı minimum yapacak noktanın gösterimi aşağıdaki şekildedir.

$$MP = \inf_{\substack{x \in C \\ g(x) \leq 0}} f(x)$$

Konveks programlama içindeki kısıtların genel yapıyı hangi oranda etkilediklerini bilmek ayrı bir önem taşımaktadır. Bunu ölçebilmek için kısıtlarda küçük değişiklikler yapıp genel yapıda ne gibi değişimler meydana getirdiği incelenirse, hangi kısıtların diğerlerine göre daha etkin olduğu saptanabilir.¹⁴ Bu amaç doğrultusunda $z \in R^m$ için, programlamamızı $P(z)$ şeklinde yeniden tanımlayabilir, böylelikle aşağıdaki programlamayı elde ederiz.

$$\text{Minimize } f(x)$$

$$\text{Kısıtlar } g_1(x) \leq z_1 \dots g_m(x) \leq z_m$$

$$x \in C \subset R^n \quad \text{ve} \quad f(x), g_1(x) \dots g_m(x), C \text{ üzerinde}$$

tanımlanan konveks fonksiyonlar.

Teorem 2.2.3.1 : P konveks program ve $P(z)$ ilgili programın yeniden tanımlanmış hali olsun. Buna göre $MP(z)$ fonksiyonu konvektir ve fonksiyonun tanım kümesi konveks yapıdadır.

Teorem 2.2.3.2 : P tam tutarlı bir konveks program ise, 0 noktası $MP(z)$ fonksiyonunun tanım kümesinin iç noktasıdır.

Teorem 2.2.3.3: P tam tutarlı bir konveks program ve MP sınırlı olsun. Bu durumda $MP(z)$ tüm tanım kümesi üzerinde sınırlıdır ve $\lambda \geq 0$ ve $\lambda \in R^m$ gibi bir vektör için $MP(z) \geq MP(0) - \lambda \cdot z$ eşitsizliği elde edilir.¹⁵

λ vektörü P için duyarlılık vektörü olarak adlandırılır ve yukarıdaki teorem yüksek tutarlı konveks programın daima duyarlılık vektörüne sahip olduğunu gösterir.

¹⁴ LUENBERGER, a.g.e., s.231.

¹⁵ PERESSINI, a.g.e., s.177.

Teorem 2.2.3.4: P konveks program ve λ duyarlık vektörü olsun. Buna göre

$$MP = \inf_{x \in C} \{f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)\} \text{ şeklinde gösterilen eşitlik doğrudur.}$$

Teorem 2.2.3.5: P konveks programının Lagrange'ı

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \text{ şeklinde tanımlanan fonsiyondur ve kısaca } L(x, \lambda) \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Teorem 2.2.3.6 (Karush-Kuhn-Tucker, Eğer Noktası Biçimi): P tam tutarlı konveks program olsun. Aşağıda sıralanan 3 şartı gerçekleyen bir λ^* vektörü için $x^* \in C$, ilgili programın çözümüdür.¹⁶

- a) $\lambda^* \geq 0$
- b) $L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*)$, tüm $x \in C$
- c) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, m$

Teorem 2.2.3.7 (Karush-Kuhn-Tucker, Gradient Biçimi): P, C konveks üzerinde tanımlı ve birinci dereceden türevlenebilen , amaç ve kısıt fonksiyonlarına sahip, tam tutarlı konveks program olsun. Aşağıda sıralanan 3 şartı gerçekleyen bir λ^* vektörü için , $x^* \in C$ ilgili programın çözümü olacaktır.¹⁷

- a) $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, m$
- b) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$
- c) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$

¹⁶ MANGASARIAN, a.g.e., s.71.

¹⁷ HIMMELBLAU, a.g.e., s.34.

Teorem 2.2.3.8 (Lagrange Çarpanı): S , R^{n+1} de bir n -yüzey, $U \subset R^{n+1}$ için $f:U \longrightarrow R$ ve her $q \in S$ için $\nabla f(q) \neq 0$ olsun. $g:U \longrightarrow R$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in S$, S üzerindeki g fonksiyonu için ekstrem nokta ise $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(q)$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı vardır ve bu sayı Lagrange çarpanı olarak adlandırılır.¹⁸

2.2.4 Kuadratik Programlama

Değişkenler üzerinde maksimum veya minimum şartını sağlamak için doğrusal kısıt ve negatif olmama kısıtı ile sınırlandırılmış, amaç fonksiyonu ikinci dereceden bir polinom olan doğrusal olmayan programlama tipine kuadratik programlama denir. Kuadratik programlama istatistikte regresyon analizinden, portföy analizine kadar pek çok yerde uygulama alanına sahiptir. Aşağıda gösterilen form standart kuadratik programlamanın genel şeklidir,

$$\text{Minimize : } f(x) = a + cx + \frac{1}{2}xQx$$

$$\text{Kısıtlar : } Ax \leq b, x \geq 0$$

Q , $n \times n$ pozitif tanımlı matris, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $a \in R$ ve A rankı m olan $m \times n$ matris.

x^* gibi kuadratik programımızı minimize eden bir nokta varsa, Karush-Kuhn-Tucker koşulları programımızı minimize eden x^* değerinin bulunması için kullanılır. Bu durumda $\mu^* \in R^m$ ve $v^* \in R^n$ değerleri için aşağıdaki şartlar doğrudur,¹⁹

¹⁸ John A. THORPE, **Elementary Topics in Differential Geometry**, New York, Springer Verlag, 1979, s.19.

¹⁹ PERESSINI, **a.g.e.**, s.260.

$$\text{a) } \mu_i^* \geq 0, i = 1 \dots k, v_j^* \geq 0, j = 1 \dots n$$

$$\text{b) } c + Qx^* + A^t \mu^* - v^* = 0$$

$$\text{c) } \mu_i^* [(Ax^*)_i - b_i] = 0, i = 1 \dots m$$

$$\text{d) } x_j^* v_j^* = 0, j = 1 \dots n$$

İKİNCİ BÖLÜM

PORTFÖY SEÇİM MODELİ

1. Portföy Seçim Problemi

Belirli bir kişi veya grup tarafından elde tutulan, ağırlıklı olarak hisse senedi, tahviller gibi menkul kıymetten oluşan bileşkeye portföy adı verilir.¹ Portföy oluşturma altında yatan temel felsefe, gelecekle ilgili belirsizliğin sonucu olarak ortaya çıkan riskin mümkün olduğu kadar en aza indirme düşüncesidir. Ancak burada cevabının bulunması gereken en önemli soru, portföyü oluşturma kriterinin ne olduğudur. Kısacası hangi varlıkların hangi ağırlıkta portföyümüzde yer alması gerektiridir.

Modelin amacı belirlenen n adet varlıktan elde edilebilecek mümkün portföy kümesi içinden, yatırımın beklenen getirisi ile riski arasında en iyi dengeyi sağlayacak optimum portföyün bulunmasıdır.

Portföy analizini ilk defa H. Markowitz ortaya koymuştur. Markowitz'in modeli elde tutma dönemi olarak bilinen bir süre içinde yatırımcının parasını hangi portföye yatıracağını inceler. Bu nedenle Markowitz yaklaşımı bir tek dönem yaklaşımı olarak düşünülebilir. Dönem sonunda yatırımcı parasını çekebileceği gibi yeniden de yatırabilir.

¹ Peter MOLES, Nicholas TERRY, **The Handbook of International Financial Terms**, Oxford University Press, 1999, s.426.

Markowitz ‘e göre, yatırımcı en iyi portföyü tespit etmek için mümkün tüm portföylerin beklenen getiri ve risk oranlarını incelemeli ve portföyler arasında en az risk, en fazla getiriyi veren portföyü tercih etmelidir.

2. Portföy Getirisi ve Riski

Bir önceki bölümde belirtildiği gibi model iki dönemden oluşmaktadır. $t = 0$ dönem başı, $t = T$ dönem sonunu göstermektedir. Modelimizde a_i portföyümüz içindeki i . sıradaki varlığı göstermektedir. İlgili varlığın dönem başı değeri $\mathcal{G}_{i,0}$ ve dönem sonu değeri $\mathcal{G}_{i,T}$ şeklinde gösterilecektir.

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

ilgili portföy içinde i . sıradaki varlığın miktarını göstermektedir. Model içindeki tüm miktarlar pozitif olarak kabul edilecektir ($\theta_i \in \mathbb{R}_+$) a_i varlığımızın $t = 0$ zamanında portföy içindeki ağırlığı

$$w_i = \frac{\theta_i \mathcal{G}_{i,0}}{\sum_{j=1}^n \theta_j \mathcal{G}_{j,0}}$$

şeklindedir. Burada önemli bir sonuç, tekil varlıkların portföy içindeki ağırlıklarının toplamının 1 ‘e eşit olmasıdır ($\sum_{j=1}^n w_j = 1$) . a_i varlığının getirisi R_i ,

$$\mathcal{G}_{i,T} = \mathcal{G}_{i,0}(1 + R_i)$$

eşitliği ile tanımlanır. Aynı eşitliği R_i ye göre çözersek

$$R_i = \frac{g_{i,T} - g_{i,0}}{g_{i,0}}$$

denklemini elde ederiz. Gelecek ile ilgili öngörü tam kesinliğe sahip olmadığından varlığın T dönemindeki değeri rassal değişken durumundadır ki bu sonuç varlığın getirisinin (R_i) de rassal bir değişken olduğunu gösterir. Ancak varlığın geçmiş dönemlerdeki pozisyonlarından hareketle beklenen getirisi,

$$\mu_i = \varepsilon(R_i)$$

ve beklenen getiriden sapmalar (varyans),

$$\sigma^2 = \text{Var}(R_i)$$

bulunabilir. a_i varlığının varyansı, ilgili varlığın riski olarak tanımlanır. Varlığın risk içermesi, varyansının sıfırdan büyük olma şartını sağlamasına bağlıdır.

2.1 Portföy Getirisi

Yukarıda ki kısımda tek varlık için beklenen getiri ve bunun riski tanımlanmıştı. Bu alt bölümde ise varlıkların oluşturduğu portföyün getirisi ve riski tanımlanacaktır.

Portföyün getirisi, portföy içindeki varlıkların her birine karşılık gelen ağırlığıyla çarpımlarının toplamıdır² ve

$$R = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

² F. William SHARPE, **Investments**, New Jersey, Prentice Hall, 1985, s.120

şeklinde gösterilir. Beklenen değer fonksiyonu doğrusal olduğundan, bir bütün olarak portföyün beklenen getirisi³

$$\mu = E\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

şeklindedir.

Tekil getiriler genellikle bağımsız olmadıklarından, portföyün getirisinin varyansı⁴

$$\sigma^2 = Var\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

şeklinde gösterilir.

2.2. Sistemik ve Sistemik Olmayan Risk

Portföye girecek varlıkların sayısı arttıkça, portföyün riskinde düşme görülür. Buna portföy etkisi denir. Bu etki, varlıkların sayısı arttıkça, varlıkların riskinin portföy riskini giderek azaltması olarak yorumlanır. Riskin çeşitlendirme ile yok edilen bu kısma sistemik olmayan risk denir.⁵

Portföy oluşturma ile yok edilemeyecek kısım ise sistemik risk olarak adlandırılır. Sistemik risk, varlıkların tümünün performanslarını etkileyen nedenlerden ileri gelir. Örneğin faiz hadlerinde, para arzında ki değişimler gibi makro ekonomik etkiler, bütün varlıkların değerinde değişim meydana getirir.

³ Robert A. HAUGEN, **Modern Investment Theory**, Prentice Hall, 1993, s.72.

⁴ J. Alexander GORDON, William F. SHARPE, Jeffery V. Barley, **Fundamentals of Investments**, Prentice Hall, 1993, s.225.

⁵ Frank K. REILLY, **Investments**, The Dryden Press, 1992, s.576.

Sistematik olmayan risk, bir firmayı ya da bir endüstriyi etkileyen risktir. Örneğin yeni keşifler, tüketicinin zevklerindeki değişimler, grevler, reklamlar, yöneticilerin başarısı sistematik olmayan riske sebep olur.

Markowitz'in işaret ettiği nokta, aralarında tam veya tama yakın korelasyon ilişkisi olmayan varlıkların seçilmesi ile oluşturulan portföyün riskinin sistematik risk düzeyine inebileceğidir. Bunu varlıkların getirileri arasındaki ilişkinin oranı ne kadar düşükse , portföyün riski o oranda düşer şeklinde söyleyebiliriz.

2.3 Varlık Risklerinin Etkileşimi

Varlıkların çeşitli korelasyon durumlarında ki görüntülerini 3 temel şekilde gösterebiliriz. Basitlik ve görselliğin korunması açısından 2 varlıklı portföy kullanılacaktır.

μ_1 ve σ_1^2 sırasıyla a_1 varlığının beklenen getirisi ve riski, μ_2 ve σ_2^2 , a_2 varlığının beklenen getirisi ve riskidir. Portföy içinde a_1 varlığının ağırlığını t olarak alırsak, a_2 varlığının ağırlığı $(1-t)$ olmak zorundadır. Portföyün beklenen getirisi,

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$$

portföyün riski,

$$\sigma^2 = t^2\sigma_1^2 + (1-t)^2\sigma_2^2 + 2t(1-t)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

şeklinde gösterilir. Keyfi olarak birinci varlığın riskinin ikinci varlığın riskinden daha düşük veya eşit olsun. Bu ifadeyi $0 < \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ şeklinde gösterebiliriz.

$\rho_{1,2} = 0$ Şartı :

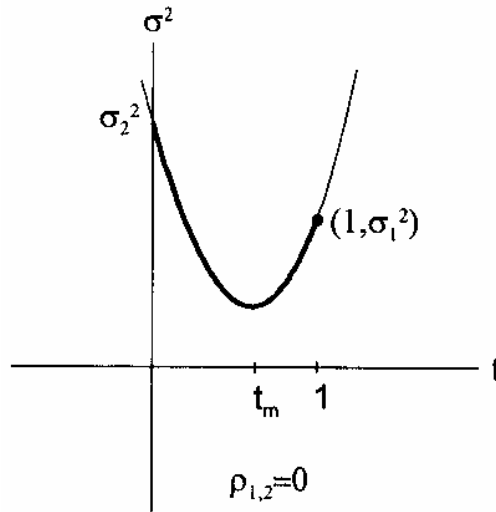
a_1 ve a_2 varlığının arasında herhangi bir ilişkinin varolmadığını gösterir. Bu durumda portföy riski⁶,

$$\sigma^2 = t^2 \sigma_1^2 + (1-t)^2 \sigma_2^2$$

şeklinde olacaktır. Bu ifadeyi t değişkeninin katsayılarına göre düzenlersek,

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2 - 2\sigma_2^2 t + \sigma_2^2$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin 2. dereceden bir polinom olduğu açıktır ve grafiği aşağıda gösterilen şekildedir,



Şekil 2.1

Minimum riski elde etmek için varlıkların hangi ağırlıkta portföyümüzde bulunması gerektiğini bulmak zorundayız. Bunun için ilgili fonksiyonun birinci dereceden türevini alıp sıfıra eşitlersek,

⁶ Steven ROMAN, *Introduction to the Mathemats of Finance*, Springer Verlag, 2004, s.45.

$$t_m = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

eşitliğini elde ederiz ki bu minimum risk için gerekli olan ağırlık noktasıdır. Elde ettiğimiz sonucu denkleminize yerleştirirsek,

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

elde ederiz ki bu da bize minimum portföy riskini verir. Sonuçlardan görüleceği gibi portföyün minimum riski, tekil varlıkların kendi risklerinden daha küçüktür

$$0 < \sigma_m^2 < \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

$\rho_{1,2} = 1$ Şartı :

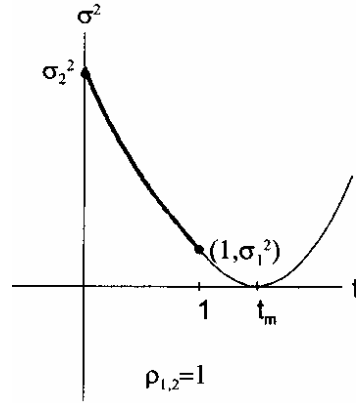
a_1 ve a_2 varlıkları arasında tam bir korelasyonun varolmaması durumunda portföy riski,

$$\sigma^2 = t^2 \sigma_1^2 + (1-t)^2 \sigma_2^2 + 2t(1-t)\sigma_1\sigma_2$$

olacaktır. Bu ifadeyi t değişkeninin katsayılarına göre düzenlersek,

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)t + \sigma_2]^2$$

halini elde ederiz. Bu ifadenin grafiği aşağıda gösterilmiştir,



Şekil 2.2

Minimum riski gerçekleyen ağırlıkları bulmak için ilgili fonksiyonun birinci dereceden türevini alıp sıfıra eşitlersek,

$$t_m = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > 0$$

sonucunu elde ederiz. Ancak a_2 varlığımızın ağırlığını (portföy içindeki) hesaplırsak,

$$1 - t_m = \frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0$$

sonucunu elde ederiz ki bu da bize minimum riski gerçekleyecek portföyün a_2 varlığının yüksek risk içermesi durumunda açığa satış durumunu gerçekleyeceğini gösterir.

$\rho_{1,2} = -1$ Şartı :

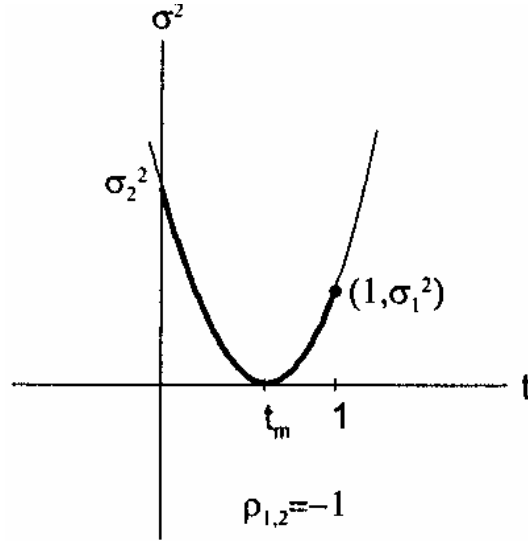
a_1 ve a_2 varlıkları arasında tam ters yönlü korelasyonun var olması durumunda portföy riski,

$$\sigma^2 = t^2 \sigma_1^2 + (1-t)^2 \sigma_2^2 - 2t(1-t)\sigma_1\sigma_2$$

olacaktır. Bu ifadeyi t değişkeninin katsayılarına göre düzenlersek,

$$[(\sigma_1 + \sigma_2)t - \sigma_2]^2$$

sonucunu buluruz. Bu ifadenin grafiği aşağıdaki şekilde gibidir,



Şekil 2.3

Minimum riski gerçekleyen ağırlıkları bulmak için ilgili fonksiyonun birinci dereceden türevini alıp sıfıra eşitlersek,

$$t_m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz sonucu denkleminize yerleştirirsek,

$$\sigma_m^2 = 0$$

sonucunu elde ederiz. Yukarıda gösterilen 3 temel durumdan, tam negatif korelasyona sahip olan varlıkların oluşturduğu portföyün en geçerli portföy olduğu gösterilmiştir. Ancak gerçek hayattaki temel zorluk bu şekilde tam negatif korelasyona sahip olan varlıkları bulmaktır.

3. İki ve İkiden Çok Varlık İçeren Portföy

Üçten fazla varlık içeren portföyler için yapacağımız analizleri cebirsel boyutta incelemek zorunda kalmaktayız. Portföy analizinin yapısını görsel olarak da gösterebilmek için ilk olarak ilki varlık içeren portföyü almak daha sonra bunu n varlık içeren portföye genelleştirmek daha sağlıklı bir yöntemdir.

3.1 İki Varlık İçeren Portföy

a_1 ve a_2 , portföyümüzü oluşturan varlıklar w_1 ve w_2 ise ilgili varlıkların portföy içindeki ağırlıklarını gösterebilir. İlgili portföyün beklenen getirisi,

$$\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

portföyün riski,

$$\sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

şeklindedir.

$\rho_{1,2} = \pm 1$ Şartı :

Önceki bölümde ki σ^2 nin $\rho = \pm 1$ şartındaki durumlarını standart sapmanın mutlak değeri biçiminde yazarsak,

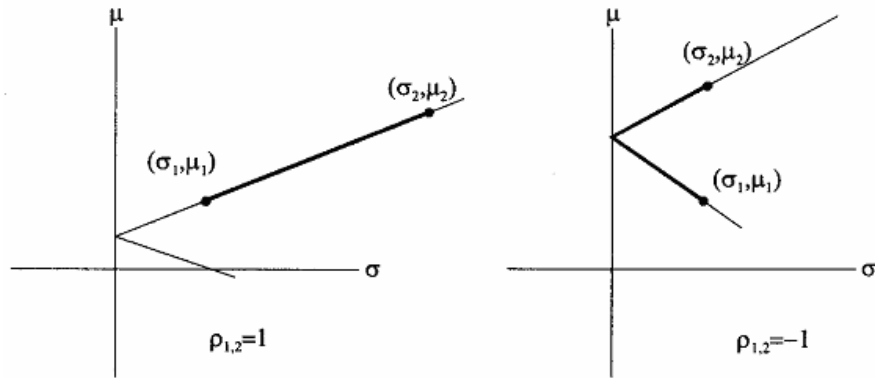
$$\sigma = |w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2|$$

eşitliğini elde ederiz ki mutlak değer sıfırdan büyük şartı dahilinde varlıkların daima risk içerdiğini göstermiş oluruz. Görsel basitlik için $w_1 = 1 - \lambda$, $w_2 = \lambda$ olarak yazıp bunları da beklenen getiri ve standart sapma fonksiyonlarına yerleştirirsek,

$$\mu = (1 - \lambda)\mu_1 + \lambda\mu_2$$

$$\sigma = |(1 - \lambda)\sigma_1 + \lambda\sigma_2|$$

şeklindeki parametrik denklemleri elde etmiş oluruz. ($\lambda \in (0,1)$). İlgili parametrik denklemin grafiğini (σ, μ) düzleminde çizersek aşağıdaki grafikleri elde ederiz.⁷



Şekil 2.4

Yukarıda ki grafiklerden de görüldüğü gibi, standart sapmanın mutlak değer eşitliği şeklinde olmasından dolayı, doğru daima σ - ekseninin pozitif yönünde kalmaktadır. $\rho_{1,2} = 1$ şartını sağlayan grafiğin üzerinde ki koyu kısmın 1-1, örten özelliğine sahip olması, minimum portföy riski için varlıkların portföy içindeki ağırlıklarının pozitif değerde olması gerektiği şartını bozar. Koyu kısmın 1-1 lik

⁷ William SHARPE, **Portfolio Theory**, New York, McGraw-Hill Book Company, 1970, s.46.

özelliğini kaybettiği ikinci grafikte ise portföy riskini minimum yapacak olan varlık ağırlıklarının, pozitif olma şartı sağlanmış olacaktır

-1<ρ<1 Şartı :

Varlıklar arasında ki korelasyon ilişkisini -1<ρ<1 aralığında kabul edersek denklemlerimizi,

$$\mu = (\mu_2 - \mu_1)\lambda + \mu_1$$

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\lambda^2 - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)\lambda + \sigma_2^2$$

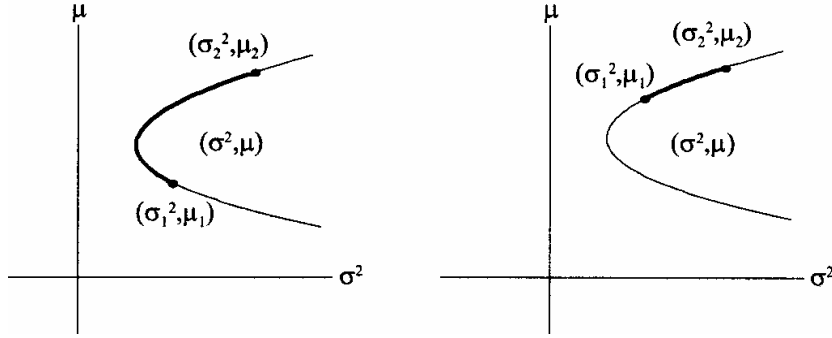
şeklinde yazarız. $\rho > 0$ olduğundan, portföy riskini gösteren fonksiyon içindeki λ^2 katsayısı,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 - \rho) > 0$$

şartını sağlar ki, bu durum fonksiyonun $\rho = 1$ durumundan farklı olarak, kuadratik bir fonksiyon olması gerektiğini ortaya koyar.⁸

Aşağıdaki şekiller (σ_1^2, μ_1) ve (σ_2^2, μ_2) noktalarının fonksiyon üzerinde ki farklı konumlarını göstermektedir. Daha önce elde etmiş olduğumuz sonuçlar yardımı ile sağ tarafta ki grafiğin minimum riski gerçekleştirmek için açığa satış durumunda olması gerektiğini çıkarabiliriz. Sol taraftaki grafiğimiz için böyle bir gereklilik yoktur.

⁸ SHARPE, A.g.e., s.48.



Şekil 2.5

Keyfi olarak $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2$ şartını kabul edip, risk fonksiyonunu λ parametresine göre türevini alırsak,

$$\frac{d}{ds}(\sigma^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\lambda - 2\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)$$

sonucunu elde ederiz ki bu sonucu λ 'ya göre çözersek minimum riski sağlayan portföy içindeki ağırlıklardan birini elde etmiş oluruz. Buna göre,

$$\lambda_{\min} = \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

bu ifadeyi de risk fonksiyonumuza da yerleştirirsek,

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

sonucunu elde ederiz.⁹ Daha önceden de ifade edildiği gibi portföy riskinin açığa satış durumu ile karşı karşıya kalmaması için $\lambda_{\min} \in [0,1]$ şartını sağlaması gerekir.

⁹ Erdinç ALTAY, **Sermaye Piyasası'nda Varlık Fiyatlama Teorileri**, İstanbul, Derin Yayınları, 2004, s.27.

3.2 İkiiden Fazla Varlık İçeren Portföy

Bu alt bölümde portföyümüzü oluşturan varlıkların sayısının ikiden fazla olduğu kabul edilecektir. Portföy içindeki varlıkların ağırlıklarının vektörel biçimi ve birler matrisi sırası ile,

$$W = (w_1 \dots w_n)$$

$$O = (1 \dots 1)$$

şeklinde gösterilir. Böylelikle ağırlıkların toplamının bire eşit olması şartını vektörel iç çarpım ile $OW^t = 1$ şeklinde gösterebiliriz. Beklenen getirilerin vektörü ve kovaryans matrisi ise sırası ile,

$$M = (\mu_1 \dots \mu_n)$$

$$C = (c_{i,j}), \quad c_{i,j} = \text{Cov}(R_i, R_j)$$

şeklinde gösterilir.

Kovaryans matrisi ile ilgili olarak belirtilmesi gereken önemli özellikler vardır. Bunlardan birincisi simetrik bir matris olması diğeri ise pozitif matris olma özelliğine sahip olmasıdır.

Portföyün beklenen getirisini vektörel iç çarpım olarak yazarsak,

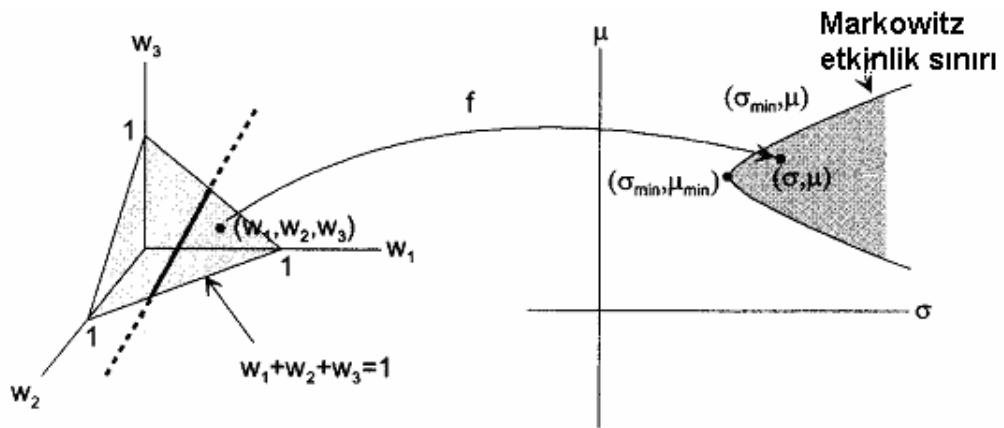
$$\mu = MW^t = \mu_1 w_1 \dots \mu_n w_n$$

eşitliğini elde ederiz. Portföy riskini de aşağıda ki şekilde yazarız.

$$\sigma^2 = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n w_j R_j\right) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_j w_i = \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{W}^t$$

Bu noktadan sonra risk kavramı standart sapmaya indirgenerek incelenecektir. Bunun nedenlerini, yorum kolaylığı sağlaması açısından risk ölçütü olarak kullanılması olarak gösterebileceğimiz gibi, kısa dönemli verilerin dağılımının genellikle normal dağılım özelliği sergilemesinden dolayı, bu dağılımın standart sapma özelliklerinden yararlanabilineceğidir.

Portföy içinde ki varlıkların ağırlıkları ve bu ağırlıklara karşılık gelen risk-beklenen getiri noktasını üç varlık içeren portföy yardımı ile inceleyip bundan genellemeler yapabiliriz. Aşağıda ki şeklin sol tarafı üç varlığın ağırlık katsayılarını göstermektedir. Daha önce de belirtildiği gibi bu ağırlıkların toplamı bire eşittir. Yorumlarımıza üç boyutlu uzayda ki görsel ifadenin n boyutlu uzaya soyutlanması olarak yaparsak, sol şekil bize toplamı bir olan ağırlık vektörlerinin kümesinin üzerinde bulunduğu hiperdüzlemi verir. f ağırlık uzayında ki her noktayı, risk-beklenen getiri sıralı ikilisinin gerdiği uzaya taşıyan bir fonksiyondur ve kısaca $f(w_1, \dots, w_n) = (\sigma, \mu)$ şeklinde gösterilir.¹⁰



Şekil 2.6

¹⁰

ROMAN, a.g.e., s.53.

f fonksiyonunun genel olarak nasıl bir eğilim gösterdiğini anlayabilmek için, ilgili fonksiyon altında ağırlıklar hiperdüzleminin görüntüsünün nasıl belirlendiğini incelemek gerekmektedir. Bunun için n boyutlu uzayda ki ağırlıklar hiperdüzleminin parametrik denklemini formülize etmek gerekmektedir.

$$\phi(t) = (a_1t + b_1, \dots, a_nt + b_n) = At + B$$

$$\mu = MW = M(At + B) = (MA)t + MB$$

fonksiyonu doğrusaldır ve t ye göre yukarıda ki eşitliği çözersek,

$$t = \frac{\mu - MB}{MA}$$

elde ederiz. Portföy riski,

$$\sigma^2 = WCW^t = (At + B)C(A^t t + B^t) = (ACA^t)t^2 + (BCA^t + ACB^t)t + BCB^t$$

şeklindedir ve kuadratik bir yapıdadır. Böylelikle $\phi(t)$, $-\infty < t < \infty$ aralığında bir doğruyu izlerken, risk-beklenen getiri noktası (σ, μ) düzleminde bir parabolü izler.

3.2.1 Minimum Risk Noktası

Analizde ki temel amacımız, minimum riski elde edebileceğimiz portföy ağırlıklarını bulmaktır. Bu minimum değerleri bulmak için Lagrange çarpanı yöntemi kullanılır. Başka bir söylemle,

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_j w_i = WCW^t$$

eşitliği

$$OW^t = w_1 \dots w_n = 1$$

kısıtına göre minimize edilmesi amaçlanmaktadır.

$$g(w_1 \dots w_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_j w_i + \alpha(1 - w_1 \dots w_n)$$

fonksiyonunun w_i ve α parametrelerine göre kısmi türevleri alınır,

$$CW^t = \frac{\alpha}{2} O^t$$

$$W = \frac{\alpha}{2} OC^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliği fonksiyonun kısıtına koyarsak,

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{OC^{-1}O^t}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliği ağırlıklar vektörünün eşitliğine yerleştirirsek,

$$W = \frac{OC^{-1}}{OC^{-1}O^t}$$

sonucunu elde ederiz ki bu bize minimum riske sahip portföyün varlıklarının ağırlıklarını vermektedir.

3.2.2 Markowitz Etkinlik Sınırı

Tüm beklenen getiri değerleri için minimum riski veren noktalar kümesi Markowitz etkinlik sınırı olarak tanımlanır. Bu alt bölümde verilen bir beklenen

getiriye göre minimum riske sahip portföyün ağırlıklarının bulunması incelenecektir. Bir önceki alt bölümde ki gibi amacımız,

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_j w_i = WCW^t$$

eşitliğini minimize etmektir. Bu nokta da iki kısıt vardır. Bunlar sırası ile,

$$OW^t = w_1 \dots w_n = 1$$

$$MW^t = \mu_1 w_1 \dots \mu_n w_n$$

Minimum noktalarını inceleyeceğimiz fonksiyonu yazıp, kısmi türevlerini alırsak,

$$g = \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} w_j w_i + \alpha(\mu - \mu_1 w_1 \dots - \mu_n w_n) + \beta(1 - w_1 \dots - w_n)$$

$$2CW^t = \alpha M^t + \beta O^t$$

$$W = \frac{1}{2}(\alpha M + \beta O)C^{-1}$$

eşitliğini elde ederiz. W^t için bu ifadeyi fonksiyonun kısıtlarına yerleştirirsek,

$$(MC^{-1}M^t)\alpha + (MC^{-1}O^t)\beta = 2\mu$$

$$(OC^{-1}M^t)\alpha + (OC^{-1}O^t)\beta = 2$$

sonucu elde edilir. Yukarıda ki denklem sistemini Cramer kuralına göre çözüp, β ve α değerlerini ağırlık vektörünün eşitliğine yerleştirirsek,

$$W = \frac{\begin{pmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{pmatrix} MC^{-1} + \begin{pmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{pmatrix} OC^{-1}}{\begin{pmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{pmatrix}}$$

sonucunu elde ederiz.¹¹ Bu sonuç, önceden belirlenen beklenen getiriyi sağlayacak ve minimum riski verecek olan varlıkların portföy içinde ki ağırlıklarının miktarını verir.

3.3 Risksiz Varlık İçeren Portföy

Bu bölüme kadar portföyü oluşturan varlıkların hepsinin riskli olduğu kabul edilmişti. Bu bölümde ise portföy içinde riskli varlıkların yanısıra risksiz varlıkların da olduğu kabul edilecektir. Markowitz portföy teorisinin risksiz varlıkları da içerecek şekilde genişletilmesi William Sharpe tarafından bulunmuş olsa da John Lintner ve J. Mossin' nin birbirlerinden bağımsız ve eşzamanlı olarak bu konuda bulmuş oldukları sonuçlar nedeni ile, ilgili teorem literatürde SLM-CAP M olarak da adlandırılır.

Sermaye fiyatlama modelinin gerisinde yatan temel düşünce, yatırımcının risk-beklenen getiri dengesini daha iyi bir seviye de oluşturmak için portföyünü riskli ve risksiz varlıklardan belli oranda ekleyerek oluşturacağıdır. Bu ifadeyi analitik yollardan gösterirsek a_{rf} portföy içinde ki risksiz varlıkları, w_{rf} ilgili risksiz varlıkların ağırlıklarını, $a_1, \dots, a_n$ portföy içinde ki riskli varlıkları ve $w_1, \dots, w_n$ bu varlıkların ağırlıklarını gösterebiliriz,¹²

$$w_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

¹¹ ROMAN, a.g.e., s.59.

¹² REILLY, a.g.e., s.579.

$$w_{riskli} = \sum_{i=1}^n w_i \leq 1$$

şartları altında portföyün beklenen getirisi,

$$\mu = w_{rf} \mu_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = w_{rf} \mu_{rf} + \mu_{riskli}$$

şeklindedir. Portföyün varyansı ise aşağıda ki şekildedir.

$$\sigma^2 = Var(w_{rf} R_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i R_i) = Var(\sum_{i=1}^n w_i R_i) = \sigma_{riskli}^2$$

Portföy içinde riskli varlıkların kendi aralarında ki ağırlıkları türetilmiş riskli portföy olarak adlandırılır. Türetilmiş riskli portföyün beklenen getirisini μ_{der} ve riski σ_{der}^2 şeklinde gösterilir. Bu kavramlara göre portföyün beklenen getirisini tekrardan yazarsak,

$$\mu = w_{rf} \mu_{rf} + \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

$$w_{rf} \mu_{rf} + w_{riskli} \sum \frac{w_i}{w_{riskli}} \mu_i$$

$$w_{rf} \mu_{rf} + w_{riskli} \mu_{der}$$

sonucu elde edilir. Portföy riski ise aşağıda ki şekildedir,

$$\sigma^2 = Var(\sum_{i=1}^n w_i R_i) = w_{riskli}^2 Var(\sum \frac{w_i}{w_{riskli}} R_i) = w_{riskli}^2 \sigma_{der}^2$$

Böylelikle aşağıda ki sonuçlar elde edilmiş olunur,

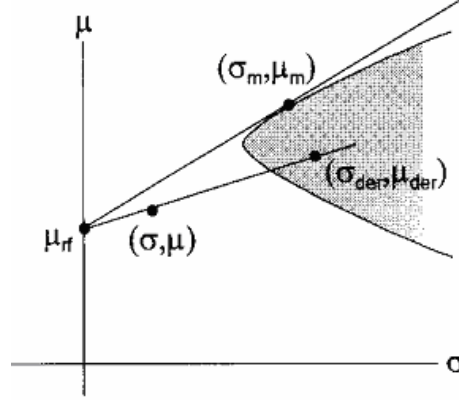
$$\mu = w_{rf} \mu_{rf} + w_{riskli} \mu_{der}$$

$$\sigma = w_{riskli} \sigma_{der}$$

$w_{rf} = 1 - w_{riskli}$ ve $\sigma = w_{riskli} \sigma_{der}$ sonuçlarını beklenen getiri fonksiyonuna eklersek,

$$\mu = \frac{\mu_{der} - \mu_{rf}}{\sigma_{der}} \sigma + \mu_{rf}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda ki grafik bu doğruyu göstermektedir.¹³



Şekil 2.7

Grafik üzerinde iki marjinal durum da görülmektedir. Riskli varlıkların portföy içinde ki ağırlıkları sıfıra eşitse, $(\sigma, \mu) = (0, \mu_{rf})$ durumu sağlanmış olur ve risk içermediğinden beklenen getiri ekseninde bir noktadır. Riskli varlıkların portföy

¹³

George W. GALLINGER, Jerry B. POE, **Essentials of Finance**, New Jersey, Prentice Hall, s.166.

içinde ki ağırlıkları toplamı bire eşitse, $(\sigma, \mu) = (\sigma_{der}, \mu_{der})$ durumu sağlanmış olur ki buradan da önceki bölümde incelenen sonuçlar bulunur.

Yukarıda belirtilen iki marjinal durumun dışında, yatırımcı portföyü riskli ve risksiz varlıklar içeriyorsa, portföy için risk-beklenen getiri noktası $(0, \mu_{rf})$ ve $(\sigma_{der}, \mu_{der})$ noktalarını birleştiren doğru üzerinde olacaktır. Ancak $(\sigma_{der}, \mu_{der})$ noktası Markowitz bölgesinde keyfi bir yerdedir, bu yüzden en yüksek getiriyi bulmak için Markowitz bölgesinin üst kısmına teğet olan doğrunun teğet noktasını bulmak gerekir.

3.3.1 Sermaye Piyasası Doğrusu Denklemi

Markowitz bölgesinde ki keyfi bir (σ, μ) noktasını $(0, \mu_{rf})$ noktası ile birleştiren doğrunun eğimi,

$$s = \frac{\mu - \mu_{rf}}{\sigma} = \frac{\sum \mu_i w_i - \mu_{rf}}{\sum c_{i,j} w_i w_j}$$

şeklindedir. Minimum riski sağlayan noktayı, $(0, \mu_{rf})$ noktası ile birleştiren doğru, bu şartı sağlayan diğer doğrularla mukayese edildiğinde daha dik olmak zorundadır, başka bir deyişle diğer doğruların eğimleri ile mukayese edildiğinde maksimum olmak zorundadır. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ kısıtı altında, maksimum eğimi bulmak için Lagrange yöntemini uygulayıp,

$$f = \frac{\sum \mu_i w_i - \mu_{rf}}{\sum c_{i,j} w_i w_j} + \lambda(1 - \sum w_i)$$

fonksiyonunun kısmi türevlerini alırsak,

$$\frac{\partial f}{\partial w_k} = \frac{\mu_k \sum c_{i,j} w_i w_j - (\sum \mu_i w_i - \mu_{rf})(\sum c_{i,k} w_i)}{(\sum c_{i,j} w_i w_j)^{\frac{3}{2}}} - \lambda = 0$$

sonucunu elde ederiz ki bu sonucun da vektörel ifadesi aşağıda ki şekildedir.

$$(WCW^t)\mu_k - (MW^t - \mu_{rf})C_k W^t = \lambda (WCW^t)^{\frac{3}{2}}$$

$$\sigma^2 \mu_k - (\mu - \mu_{rf})C_k W^t = \lambda \sigma^3$$

Bütün k değerleri için bu eşitlik sağlandığından, yukarıda ki ifade,

$$\sigma^2 M^t - (\mu - \mu_{rf})C_k W^t = \lambda \sigma^3 O^t$$

şekline dönüşür. Son ifadenin transpozesi alıp sağdan W^t vektörü ile çarparsak,

$$\sigma^2 MW^t - (\mu - \mu_{rf})WCW^t = \lambda \sigma^3$$

$$\sigma^2 \mu - (\mu - \mu_{rf})\sigma^2 = \lambda \sigma^3$$

$$\lambda = \frac{\mu_{rf}}{\sigma}$$

sonucu elde edilir. Bu ifadeyi denklemde yerine koyarsak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$W = \frac{(M - \mu_{rf}O)C^{-1}}{(M - \mu_{rf}O)C^{-1}O^t}$$

sonucunu elde ederiz. Bu eşitlik portföyün risk içermeyen varlıklara sahip olduğunda minimum riski sağlamak için varlıkların hangi ağırlıkta olması gerektiğini göstermektedir.

3.4 Tekli İndeks Modeli

Portföy içindeki varlıkların sayısı arttıkça ortalama varyans modelinin uygulanması hesaplamalar konusunda zorluk gösterecektir. Tekli indeks modelinde varlık getirileri arasında ki korelasyon yerine, herbir varlık getirisinin piyasa ortalama getirisi veya piyasa indeksi ile olan beta katsayıları kullanılmaktadır.

William Sharpe varlıklar ile piyasa arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ve bu ilişkinin basit doğrusal regresyon modeli ile ifade edilebileceğini ileri sürmüştür. Buna göre her bir varlığın getirisi aşağıda ki regresyon doğrusu ile hesaplanır,¹⁴

$$R_k = \alpha_k + \beta_k R_M + \varepsilon$$

R_k , k .varlığın getirisi iken R_M piyasa getirisi göstermektedir. α_k , k .varlığın, pazarın durağan olduğu durumunda ki getirisi, β_k k .varlık ile Pazar arasında ki ilişkiyi göstermektedir. β_k katsayısını,¹⁵

$$\beta_k = \frac{Cov(R_k, R_M)}{\sigma_M^2}$$

¹⁴ REILLY, **a.g.e.**, s.583.

¹⁵ Stephen F. LEROY, Jan WERNER, **Principles of Financial Economics**, Cambridge, Cambridge University Press, 2001, s.188.

α_k katsayısını aşağıda ki şekilde bulunur.

$$\alpha_k = \varepsilon(R_i) - \beta_k \varepsilon(R_M)$$

Bata katsayısı, keyfi bir varlığın piyasada ki dalgalanmalarına karşı duyarlılığının ölçüsüdür. Böylelikle varlığın portföy getirisine ve riskine katkısı, ilgili varlığın beta katsayısı ile ölçülür. Beta katsayısı ile tekil varlığın riskini ve beklenen getirisini ölçebiliriz. Buna göre varlığın riski,¹⁶

$$\sigma_k^2 = \text{Var}(R_k) = \text{Var}(\beta_k R_M + \alpha_k + \varepsilon) = \text{Var}(\beta_k R_M + \varepsilon) = \beta_k^2 \sigma_M^2 + \text{Var}(\varepsilon)$$

şeklindedir. Burada $\beta_k^2 \sigma_M^2$, a_k varlığının sistematik riskini gösterir ve piyasa riski ile orantılıdır. $\text{Var}(\varepsilon)$ ise sistematik olmayan riski göstermektedir.

Tekil varlığın beklenen getirisini beta katsayısı ile ifade etmek için aşağıdaki süreç izlenir,

$$e_k = (0..0...1.....0)$$

$$\mu_k = M e_k^t$$

daha önce bulmuş olduğumuz piyasa portföy ağırlıkları denklemini M vektörüne göre çözersek,

$$M = \frac{W_M C + \mu_{rf} O}{(M - \mu_{rf} O) C^{-1} O^t}$$

eşitliği elde edilir. Varlık beklenen getirisine ilgili eşitlik eklenirse,

¹⁶ Sheldon M. ROSS, **An Elementary Introduction to Mathematical Finance**, Cambridge, Cambridge University, 2003, s.172-173

$$\mu_k = \left(\frac{W_M C + \mu_{rf} O}{(M - \mu_{rf} O) C^{-1} O^t} \right) e_k^t$$

$$\mu_k = \frac{Cov(R_k, R_M)}{(M - \mu_{rf} O) C^{-1} O} + \mu_{rf}$$

bulunur. Beta katsayısı, $\beta_k = \frac{Cov(R_k, R_M)}{\sigma_M^2}$ ile gösterilmiştir, bu ifadeyi yukarıda elde edilen sonuçlara göre çözersek,

$$\beta_k = \frac{\mu_k - \mu_{rf}}{\mu_M - \mu_{rf}}$$

$$\mu_k = \beta_k (\mu_M - \mu_{rf}) + \mu_{rf}$$

sonucuna ulaşılır. Yukarıda ki sonuçları özetlersek, varlığın sistematik riski, piyasa sistematik riskinden küçükse, $\beta_k^2 \sigma_M^2 < \sigma_M^2$ varlığın getirisi piyasa getirisinden daha düşük olacaktır. $\beta_k^2 \sigma_M^2 > \sigma_M^2$ durumu gerçekleşirse, varlığın getirisi piyasa getirisinin üzerinde olacaktır. Burada yatırımcı için önemli bir husus, piyasa getirisinden yüksek tekil varlık getirisi aynı zamanda piyasa riskinden büyük varlık riski anlamına geldiğidir.

Sistematik ve sistematik olmayan risklerin toplamından oluşan portföy riskinin hesaplanması için,

$$\sigma_p = \sqrt{\beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{Mi}^2}$$

formülü kullanılır. σ_p portföyün getiri riski, σ_M piyasa indeksinin standart sapması, σ_{Mi} i . varlığın getirisinin indeksle ilgili olmayan değişimidir.

Yukarıda ki formül yardımı ile çok sayıda varlık içeren portföy için varyans ve kovaryans hesaplamak yerine, portföy içindeki varlık sayısı kadar varyans ve her bir varlığın indeks ile olan ilişkisi hesaplanmaktadır.

3.5 Optimum Portföyün Bulunması (Elton-Gruber Yöntemi)

Elton-Gruber yöntemine göre varlıklar aşağıda verilen formül yardımı ile performanslarına göre sıralanırlar,

$$\frac{\bar{R}_i - R_{rf}}{\beta_i}$$

$\bar{R}_i$, i . varlığın beklenen getirisi, R_{rf} risksiz varlığın getirisi, β_i i . varlığın getirisinde ki %1 lik değişimi ifade eden katsayıdır. Yukarıda ki formülle hesaplanacak en büyük oran performansı, en yüksek varlığı gösterecektir. Bu oranlar yardımı ile varlıklar arasında bir sıralama yapılabilir ve böylelikle kaç varlığın portföy içine alınacağı bir C^* kesim noktası ile bulunur. C^* kesim noktasını bulmak için her bir varlık için aşağıdaki formül uygulanarak C_i değerleri bulunur.¹⁷

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{R}_i - R_{rf})\beta_i}{\sigma_{ei}^2}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}}$$

Yukarıda ki formülde, σ_M^2 Pazar indeksinin varyansını, σ_{ei}^2 sistematik olmayan riski göstermektedir. Bulunan C_i değerleri ile $\frac{\bar{R}_i - R_{rf}}{\beta_i}$ değerleri

¹⁷ J. Edwin ELTON, J. Martin GRUBER, **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**, Canada, John Wiley & Sons, 1995, s.185

karşılaştırılır ve $\frac{\bar{R}_i - R_{rf}}{\beta_i} > C_i$ şartını sağlayan varlıklar portföy içine alınırken bu şartı sağlamayanlar portföy dışında tutulur.

Portföye girecek varlıklar belirlendikten sonra, bu varlıkların portföy içinde ki ağırlıklarının bulunması gerekmektedir. Bu işlem için her varlık için Z_i değerleri hesaplanır.¹⁸

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2} (\frac{\bar{R}_i - R_{rf}}{\beta_i} - C^*)$$

Z_i değerleri hesaplandıktan sonra, i . varlığın portföy içinde ki payı w_i değerleri aşağıda ki formül ile hesaplanır.

$$w_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^k Z_i}$$

Yukarıda ki formüller yardımı ile varlıklar performanslarına göre değerlendirilerek en iyi risk-getiri dengesini sağlayan portföyler elde edilmiş olur.

¹⁸

A.e., s.188.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

Bu bölümde Markowitz'in portföy çeşitlendirmesinde Sharpe yaklaşımları kullanılarak çok sayıda varlık arasında en iyi risk-getiri dengesini verecek portföyleri oluşturmayla ilgili uygulamaya yer verilmiştir.

Uygulama da modele alınan hisse senetleri, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB-30) ndan alınmıştır. Bu hisse senetlerinin 01.01.2005-01.05.2005 tarihleri arasında ki dönem kapanış fiyatları baz alınarak işlemler yapılmıştır.

İMKB-30'da işlem gören hisse senetleri 30 adet olup bu hisse senetleri aşağıda ki tabloda gösterilmiştir.

1. ANADOLU EFES BIRACILIK (AEFES)
2. AKBANK (AKBNK)
3. AKSIGORTA (AKGRT)
4. ARCELİK (ARCLK)
5. DENİZBANK A.S. (DENİZ)
6. DOĞAN HOLDING (DOHOL)
7. DOĞAN YAYIN HOLDING (DYHOL)
8. ENKA İNŞAAT (ENKAI)
9. EREĞLİ DEMİR ÇELİK (EREĞL)
10. FİNANSBANK (FINBN)
11. FORD OTOSAN (FROTO)
12. GARANTİ BANKASI (GARAN)
13. HURRIYET GAZETECİLİK (HURGZ)
14. İHLAS HOLDING (İHLAS)

15. IS BANKASI (C) (ISCTR)
16. IS GAYRIMENKUL YAT. ORT. (ISGYO)
17. KOC HOLDING (KCHOL)
18. KARDEMIR (D) (KRDMD)
19. MIGROS (MIGRS)
20. SABANCI HOLDING (SAHOL)
21. SISE CAM (SISE)
22. TURKCELL (TCELL)
23. TURK HAVA YOLLARI (THYAO)
24. TANSAS (TNSAS)
25. TOFAS T. OTOMOBİL FABRİKASI (TOASO)
26. TUPRAS (TUPRS)
27. ULKER GIDA (ULKER)
28. VESTEL (VESTL)
29. YAZICILAR HOLDING (YAZIC)
30. YAPI VE KREDİ BANKASI (YKBNK)

Tablo 3.1

Markowitz ve Sharpe yöntemlerinin ilgili dönemde uygulanabilmesi için İMKB-30 da işlem gören 30 hisse senedinin günlük getirileri $\frac{P_i^{t+1} - P_i^t}{P_i^t} = R_i$ formülü ile hesaplanır. İlgili formülde P_i^{t+1} , i . hisse senedinin $t+1$ 'inci günü kapanış fiyatı, P_i^t , i . hisse senedinin t 'inci günü kapanış fiyatını göstermektedir. R_i , i . hisse senedinin günlük getirisidir. R_m ile gösterilen Pazar endeksinin günlük getirileri de aynı formülle hesaplanır.

Önceki bölümde belirtildiği gibi Sharpe yaklaşımında her hisse senedinin getirisi (R_i) ile Pazar getirisi (R_m) arasında $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$ şeklinde gösterilen bir regresyon ilişkisi vardır.

Regresyon denkleminde ki parametrelerin bulunması amacıyla Microsoft Excel 2000’de regresyon hesaplamaları yapılmıştır. Bulunan regresyon denklemlerinin parametrelerinden hareketle 30-hisse senedinin hangilerinin portföy oluşturmada etkin olduğunun tespit edilmesi için Elton-Gruber yöntemine başvurulmuştur.

Elton-Gruber yönteminde hisse senetleri $\frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i}$ oranlarına göre sıralanmaktadır. Burada $\bar{R}_i$, i . hisse senedinin ortalama getirisi, R_f risksiz varlığın getirisi (uygulamada risksiz varlık kullanılmadığından bu değer sıfır olarak alınmıştır), β_i i . hisse senedinin beta katsayısıdır. Bu formülün uygulanması ile hisse senetlerinin portföy içindeki etkinlik sıraları ve buna bağlı olarak hangi hisse senetlerinin portföye dahil edilebileceği tespit edilir. $\frac{\bar{R}_i}{\beta_i}$ oranlarına göre sıralanan

30 hisse senedi Tablo 2 de gösterilmiştir. Bu sıralamaya göre portföye girmede en etkin hisse senetleri Denizbank A.S., Anadolu Efes Biracılık, Yapı ve Kredi Bankası, Aksigorta şeklinde ki sıra ile başlamaktadır. Etkinlik sıralamasının belirlenmesinden sonra kaç hisse senedinin portföye alınacağını belirlenmesi gerekir. Bu tespit için σ_M^2 Pazar indeksinin varyansı, σ_{ei}^2 sistematik olmayan risk olmak üzere, aşağıda gösterilen formül yardımı ile C_i değerleri hesaplanır.

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{R}_i - R_{rf})\beta_i}{\sigma_{ei}^2}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}}$$

Pazar indeksinin varyansı 0,283269 olarak bulunmuştur. Birinci etkin hisse senedi Denizbank A.Ş. için $\bar{R}_i = 0,046929$, $\beta_i = 0,055629$, $\sigma_{ei}^2 = 0,00113$ olduğundan C_i değeri formül yardımı ile 0,368471 olarak hesaplanmıştır.

Hisse Senedi	R_i	β_i	R_i / β_i	σ_{ei}^2	C_i	Z_i	χ_i
DENIZ	0.046929	0.055629	0.837814	0.00113	0.368471	2.168424	0.193624
AEFES	0.015263	0.024604	0.619402	0.000605	0.403145	9.030873	0.8063
YKBNK	0.011391	0.030851	0.366604	0.000634	0.397337		
AKGRT	0.011598	0.040556	0.286695	0.000234	0.347767		
YAZIC	0.005486	0.028852	0.188636	0.000432	0.33065		
VESTL	0.002092	0.025674	0.081568	0.000276	0.301082		
HURGZ	0.002124	0.040451	0.052723	0.00032	0.250744		
ENKAI	0	0.013802	0	0.000336	0.245232		
DYHOL	-0.00032	0.028345	-0.01146	0.000408	0.227031		
GARAN	-0.00088	0.034271	-0.02556	0.000469	0.206121		
FROTO	-0.0013	0.029337	-0.04443	0.000315	0.185401		
SISE	-0.00327	0.070396	-0.04626	0.010905	0.182252		
ULKER	-0.00291	0.029659	-0.09898	0.000458	0.167038		
TOASO	-0.00369	0.03219	-0.11472	0.00022	0.133924		
ISGYO	-0.00455	0.037573	-0.12128	0.000297	0.106899		
FINBN	-0.00745	0.048139	-0.15472	0.000759	0.09021		
THYAO	-0.00484	0.028041	-0.17251	0.000258	0.074482		
KCHOL	-0.00736	0.031376	-0.23469	0.000176	0.043828		
IHLAS	-0.00862	0.033721	-0.25755	0.000462	0.031347		
TUPRS	-0.00893	0.032501	-0.27203	0.001005	0.025991		
EREGL	-0.00792	0.027898	-0.28376	0.000256	0.011033		
ISCTR	-0.01263	0.040721	-0.31005	0.000203	-0.02584		
DOHOL	-0.01025	0.032151	-0.31804	0.000316	-0.0387		
KRDMD	-0.01072	0.026459	-0.40496	0.000253	-0.05182		
AKBNK	-0.01338	0.030626	-0.43845	0.000281	-0.06775		
TCELL	-0.01777	0.036196	-0.49151	0.000433	-0.08304		
MIGRS	-0.01681	0.033201	-0.50802	0.00048	-0.09435		
ARCLK	-0.01701	0.029212	-0.58582	0.000228	-0.11472		
SAHOL	-0.01166	0.020001	-0.58626	0.002965	-0.11543		
TNSAS	-0.01997	0.02704	-0.73492	0.000378	-0.12857		

Tablo 3.2

İkinci etkin hisse senedi Anadolu Efes Biracılık için $\overline{R_i} = 0.015263$, $\beta_i = 0.024604$, $\sigma_{ei}^2 = 0.000605$ olduğundan C_i değeri formül yardımı ile 0.403145 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan C_i değerleri portföye hangi hisse senetlerinin alınması

gerektiğini saptamamıza yarar. Bu belirleme de temel kriter C_i den büyük $\frac{\bar{R}_i}{\beta_i}$ oranlarına sahip hisse senetlerinin seçilmesidir. İlgili özelliğe sahip hisse senetleri etkin olarak kabul edilir.

Tablo-2’den hareketle Deniz Bank ve Anadolu Efes Biracılık etkin hisse senetleri oldukları görülür. $\frac{\bar{R}_i}{\beta_i}$ oranının C_i değerinden büyük olduğu son hisse senedinin C_i değeri C_i^* kesim noktasını verir. Optimum portföyü oluşturmak için ilgili portföy içinde ki hisse senetlerinin ağırlıklarının bulunması gerekmektedir. Bunun için öncelikle aşağıdaki formül yardımı ile Z_i değerleri hesaplanır,

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2} (\frac{\bar{R}_i - R_{rf}}{\beta_i} - C^*)$$

daha sonra Z_i değerleri yardımı ile hisse senetlerinin portföy içinde ki ağırlıkları tespit edilir. Bunun için aşağıda ki formül uygulanır,

$$w_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^k Z_i}$$

Tablo- 2 den görüleceği gibi Deniz Bank portföy içinde %19,3’lük bir ağırlığa sahip iken Anadolu Efes Biracılık % 80’lik bir ağırlığa sahiptir.

Bulunan portföyün beklenen getirisi aşağıda ki formül yardımı ile hesaplanır.

$$R_p = \sum_{i=1}^2 w_i R_i = \sum_{i=1}^2 w_i (\alpha_i + \beta_i R_i + \varepsilon_i)$$

Yukarıda ki formül yardımı ile portföyümüzün beklenen getirisi 0,021393 olarak hesaplanır. Portföyün getirisinin riski için aşağıda ki formül kullanılır.

$$V(x) = \sigma_p^2 \left[\left(\sum_{i=1}^2 w_i \beta_i \right)^2 \sigma_m^2 \right] + \left[\sum_{i=1}^2 w_i^2 \sigma_{ei}^2 \right]$$

İlgili formülü yardımı ile portföyün varyansı 0,00074 , standart sapması ise 0,0272 olarak bulunur.

Sharpe indeks ve Elton-Gruber optimum portföy bulma yöntemleri kullanılarak 30 hisse senedinden 2 tanesinin portföy oluşturmada etkin olduğu tespit edilmiş ve ilgili hisse senetlerinden optimum portföy oluşturulmuştur. Sharpe yaklaşımıyla bulunan bu sonuçlardan sonra yatırımcı tipine göre optimum portföyler Markowitz yaklaşımı ile oluşturulmaya çalışılmıştır.

Yatırımcı açısından çeşitli beklenen getiri oranlarına göre optimum portföyün bulunması için ikinci bölümde verilen aşağıda ki formül kullanılacaktır.

$$W = \frac{\begin{pmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{pmatrix} MC^{-1} + \begin{pmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{pmatrix} OC^{-1}}{\begin{pmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{pmatrix}}$$

Yukarıda ki formülde matris formları içinde geçen değerler aşağıda ki tabloda verilmiştir. C, portföye dahil olan hisse senetlerinin varyans-kovaryans matrisini göstermektedir.

Yatırımcı beklenen getiri değerini (μ) belirleyip ilgili formüle yerleştirerek optimum portföy içinde ki hisse senetlerinin ağırlıklarını bulacaktır.

C	0.002027	0.000536
	0.000536	0.000777
C⁻¹	647.23	-1786.7
	-1786.7	6756.7
OC⁻¹	-1139.47	4970
OC⁻¹O^t	3830.53	
MC⁻¹	3.61	17.35
MC⁻¹O^t	20.96	
OC⁻¹M^t	21	
MC⁻¹M^t	0.43	

Tablo 3.3

Yatırımcı açısından beklenen getiri oranı (μ) 0,05 olarak alınıp ilgili formüle bu değer yerleştirildiğinde yatırımcı açısından optimum portföy tüm sermayenin Deniz Bank'a yatırılması ile elde edilir. Bu durumda ise optimum portföyün riski Deniz Bank'ın dönem içi riskine denk gelecektir.

Yatırımcı açısından beklenen getiri oranı (μ) 0,03 olarak alınıp, bu değer formüle yerleştirilirse, yatırımcı açısından optimum portföy, sermayenin % 46,88'i Deniz Bank'a, % 52,76'sı Anadolu Efes Biracılık'a yatırılması ile elde edilecektir. Bu durumda ise optimum portföyün riski 0,0009 olarak gerçekleşir.

SONUÇ

Modern portföy teorisi ile geçmişte soyut bir kavram olan risk, somut bir yapıya indirgenmiş ve bu sayede riskin ölçülebilme özelliği de ortaya çıkmıştır. Riskin ölçülebilme özelliği, bu yapıyı minimize edecek yöntemlerin de geliştirilmesini de sağlamıştır. Bu yöntemlerden Markowitz ve Sharpe yaklaşımları oldukça kullanışlı olanlardandır.

Sharpe yaklaşımı tekil hisse senedinin getirisi ile pazarın getirisi arasındaki ilişkiyi incelerken, Markowitz yaklaşımında getiri-risk fonksiyonlarından oluşan amaç fonksiyonunu minimize edilmesi amaçlamaktadır.

Bu çalışmada iki yöntemden birinin seçilmesi yerine, çözümün daha etkin nitelikte olması için yöntemler birleştirilmiştir. Sharpe'ın tek indeks modeli ile Elton-Gruber'in optimum portföy yaklaşımları birleştirilerek 30 hisse senedi 2 etkin hisse senedine indirilmiş, daha sonra bu 2 hisse senedi Markowitz'in kuadratik programlama modelinin değişkenleri kabul edilerek en iyi risk-getiri dengesini veren optimum portföyler elde edilmiştir.

Beklenen getiri ile risk arasındaki değişim aynı yönde olduğundan, yüksek beklenen getiri amaçlayan yatırımcı yüksek bir risk oranı ile karşı karşıya kalacaktır. Yatırımcının riske katlanma düzeyine ya da amaçladığı yüksek getiri seviyesine göre farklı portföyler oluşturulabilir.

Uygulamada, 2 etkin hisse senedinden oluşturulan ve çeşitli yatırımcı tiplerine hitabeden portföyler oluşturulmuştur. 0,05'lik bir beklenen getiri seviyesini amaçlayan yatırımcı parasının tümünü Deniz Bank'a yatırmak zorundadır, böylelikle de 0,00198'lik bir riskle karşı karşıya kalacaktır. 0,03'lük bir beklenen getiri

amaçlayan yatırımcı, 0,0009'luk bir riske katlanmayı kabul ederek parasının %46,88'ini Deniz Bank'a geri kalanını Anadolu Efes Biracılık'a yatırmalıdır. İlk iki portföyü riskli bulan yatırımcı için görel olarak daha düşük risk içeren portföy getiri oranı 0,0213 olarak belirlenmiştir. Bu getiri oranında yatırım yapmak isteyen yatırımcı 0,00074 gibi daha düşük bir riskle karşı karşıya kalacaktır. Bu durumda yatırımcı parasının %19,3'ünü Deniz Bank'a geri kalanını Anadolu Efes Biracılık'a yatırarak optimum portföye ulaşacaktır.

KAYNAKÇA

- ALTAY, Erdinç: “**Sermaye Piyasası’nda Varlık Fiyatlama Teorileri**”, İstanbul, Derin Yayınları, 2004
- APOSTOL, Tom: “**Calculus**”, John Wiley & Sons, 1. cilt, 1967
- BERBERIAN, Sterling: “**A First Course in Real Analysis**”, Springer-Verlag, 1994
- BERSEKAS, Dimitri P.: “**Nonlinear Programming**”, Athena Scientific, 1999
- CHIANG, Alpha C.: “**Fundamental Method of Mathematical Economics**”, McGraw-Hill, 1994
- ELTON ,J. Edwin, J.
Martin GRUBER: “**Modern Portfolio Theory and Investment Analysis**”, Canada, John Wiley & Sons, 1995
- FLOUDAS, Christodoulos A.: “**Nonlinear and Mixed-Integer Optimization**”, New York, Oxford Press,1995
- GALLINGER, George W.,
Jerry B. POE: “**Essentials of Finance**”, New Jersey, Prentice Hall

- GORDON, J. Alexander,
William F. SHARPE,
Jeffery V. Barley: “**Fundamentals of Investments**”, Prentice Hall, 1993,
- HADLEY,G.: “ **Linear Algebra**”, London, Addison-Wesley
Publishing Company,1961
- HAUGEN ,Robert A.: ” **Modern Investment Theory**”, Prentice Hall, 1993
- HIMMELBLAU, David: “ **Applied Nonlinear Programming**”, McGraw-Hill
Book Company, 1972
- KOLMAN, Bernard,
David R. HILL: “**Uygulamalı Lineer Cebir**”, Çev. Prof. Dr. Ömer Akın
Palme Yayıncılık, 2002
- LEROY, Stephen F.,
Jan WERNER: “ **Principles of Financial Economics**”, Cambridge,
Cambridge University Press, 2001
- LUENBERGER, David: “**Introduction to Linear and Nonlinear Programming**,
Addison-Wesley Publishing Company, 1973
- MANGASARIAN, Olvi L.: “ **Nonlinear Programming**”, SIAM,1994
- MARKOWITZ ,M. Harry : “**Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and
Capital Markets**”, Oxford, Basil Blackwell
- MARKOWITZ ,M. Harry: “**Portfolio Selection Efficient Diversification of
Investments**”, 1997
- MOLES, Peter,
Nicholas TERRY: “**The Handbook of International Financial Terms**”,
Oxford University Press, 1999

- PERESSINI Anthony,
Francis SULLIVAN,
J.J. UHL: **“The Mathematics of Nonlinear Programming”**,
New York, Springer-Verlag, 1988
- REILLY, Frank K.: **“Investments”**, The Dryden Press, 1992.
- ROBERTS ,A. Wayne ,
Dale VARBERG: **“Convex Functions”**, Academic Press, 1973
- ROMAN, Steven: **“Introduction to the Mathemats of Finance”**, Springer
Verlag, 2004
- ROSS, Sheldon M.: **“An Elementary Introduction to Mathematical
Finance”**, Cambridge, Cambridge University, 2003
- SHARPE, William: **“Portfolio Theory”**, New York, McGraw-Hill Book
Company, 1970
- SHARPE, F. William: **“Investments”**, New Jersey, Prentice Hall, 1985
- THORPE, John A.: **“Elementary Topics in Differential Geometry”**, New
York, Springer Verlag, 1979
- ULUCAN, Aydın: **“Portföy Optimizasyonu”**, Ankara, Siyasal Kitabevi,
Ağustos 2004
- ÜNSAL, Aydın,
Nezir Köse: **“Ekonometri Seçme Yazılar”**, Ankara 2003
- VAJDA ,S.: **“Theory of Linear and Nonlinear Programming”**,
London, Longman, 1974
- WINSTON, Wayne: **“Operation Research”**, Thomson, 2004

