



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BAYESÇİ KESTİRİM TEKNİKLERİ İLE
HEDEF TAKİBİ**

Azime CAN

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman

Prof.Dr. Hakan Ali ÇIRPAN

Ocak, 2008

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BAYESÇİ KESTİRİM TEKNİKLERİ İLE
HEDEF TAKİBİ**

Azime CAN

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman

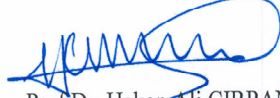
Prof.Dr. Hakan Ali ÇIRPAN

Ocak, 2008

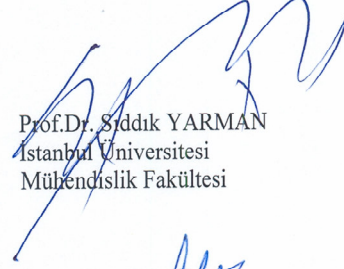
İSTANBUL

Bu çalışma 30/ 01/ 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Elektrik-Elektronik Mühendisliğı Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



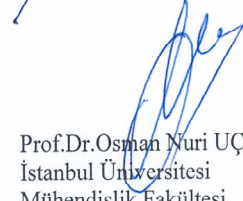
Prof.Dr. Hakan Ali ÇIRPAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr. Sıddık YARMAN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr. Aydın AKAN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr. Osman Nuri UÇAN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Doç.Dr. Sabri ARIK
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

ÖNSÖZ

Beni bu konuya yönlendiren ve çalışmalarım sırasında en az benim kadar emek ve çaba harcayan değerli hocam Prof.Dr. Hakan Ali Çırpan'a teşekkürü bir borç bilirim. Kendisinin büyük desteği ve değerli katkıları bu çalışmanın motivasyonunu oluşturmuştur.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Özgür Özfidan'a ve bana verdikleri manevi destekten dolayı Yıldız ailesine teşekkür ederim.

Ocak, 2008

Azime Can

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. PROBLEM TARİFİ VE DURUM-UZAY MODELLERİ	4
2.2. BAYESÇİ KESTİRİM	7
2.2.1. Önsel Bilgi	9
2.2.1. Özyineli Kestirim	11
2.2.1. Optimal Bayesçi Filtreleme	13
2.3. KALMAN FİLTİRİ	16
2.3.1. Kalman Filtre (KF)	22
2.3.1. Genişletilmiş Kalman Filtre (EKF).....	26
2.3.1. Unscented Kalman Filtre (UKF).....	30
2.4. NÜMERİK YÖNTEMLER	34
2.4.1. Monte Carlo Metodu	37
2.4.2. Kusursuz Monte Carlo Örneklemesi	39
2.4.1. Önem Örneklemesi	40
2.4.1. Sıralı Önem Örneklemesi	41

3. MALZEME VE YÖNTEM	43
3.1. STANDART PARÇACIK FİLTRESİ	43
3.1.1. SIS Algoritması.....	43
3.1.2. Dejenerasyon Problemi	46
3.1.3. Önem Dağılımının Seçimi.....	47
3.1.4. Yeniden Örnekleme.....	49
3.2. DİĞER PARÇACIK FİLTRELERİ	53
3.2.1. Bootstrap Filtre	53
3.2.2. Rao-Blackwell Parçacık Filtre (RBPF).....	55
3.2.3. Unscented Parçacık Filtre (UPF)	57
4. BULGULAR	60
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	68
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	72

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	: Filtreleme sürecinin bileşenleri.....	4
Şekil 2.2	: Özyineli Kestirim.....	11
Şekil 2.3	: UKF Algoritması	33
Şekil 3.1	: Önem Örnekleme	43
Şekil 3.2	: SIS Algoritma	46
Şekil 3.3	: Dejenerasyon problemi	47
Şekil 3.4	: Yeniden Örnekleme	50
Şekil 3.5	: Yeniden Örnekleme Algoritma.....	51
Şekil 3.6	: Yeniden Örnekleme Fonksiyonu	51
Şekil 3.7	: Parçacık Filtre	52
Şekil 3.8	: Standart Parçacık Filtre Algoritması.....	53
Şekil 3.9	: Bootstrap Filtre Algoritması.....	55
Şekil 3.10	: RBPF Algoritma	57
Şekil 3.11	: UPF Algoritma.....	59
Şekil 4.1	: Bootstrap- EKF ve UKF kestirim varyansları	63
Şekil 4.2	: PF ve RBPF filtrelerine ait rms hata	65
Şekil 4.3	: PF ve RBPF filtre kestirim sonuçları	66
Şekil 4.4	: Aynı sayıda parçacık için PF ve RBPF kestirim sonucu.....	66
Şekil 4.4	: PF-UKF ve PF önem dağılım sonuçları	67

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.1	: Filtre Tipleri	3
------------------	------------------------	----------

SEMBOL LİSTESİ

EKF	: genişletilmiş kalman filtre
LMMSE	: doğrusal ortalama karesel hata
MMSE	: minimum ortalama karesel hata
PF	: parçacık filtresi
RMS	: ortalama karesel hatanın standart sapması
RBPF	: rao-blackwell parçacık filtre
UPF	: unscented parçacık filtre

ÖZET

BAYESÇİ KESTİRİM TEKNİKLERİ İLE HEDEF TAKİBİ

Bu tezde bayesçi kestirim yöntemleri kullanılarak bir hedefe ait kinematik parametrelerinin takibi yapılmıştır. Hedef takibi gibi stokastik data analizi süreçlerinde, çıkarımın on-line yapılabilmesi önemlidir. Bu sebeple bu çalışmada özyineli kestirime imkan veren bayesçi formülizasyonlar kullanılmıştır. Hedefin kinematiklerinin uygun ve alışılabilir bir şekilde durum-uzayında modellendiği bir senaryoda, model parametrelerinin ve gürültülerinin imkan verdiği ölçüde optimum ve minimum hatalı takip yapılması amaçlanmıştır. Fakat model için daha gerçekçi kabullerin yapıldığı durumlarda sonuca analitik olarak ulaşmak mümkün olmamaktadır. Bu durumlar için doğrusal olmayan modelin doğrusal yaklaşımı üzerinden filtreleme yapan EKF ve belirsizlikleri gauss ile yaklaşıklayan UKF gibi yaklaşık sonuç veren yöntemler kullanılmıştır.

Bu yaklaşık yöntemlere alternatif olarak, daha iyi sonuç verdiği bilinen nümerik Sıralı Monte Carlo yöntemleri kullanılmıştır. Özel olarak, sıralı Monte Carlo örneklemesine dayanan fakat ele alınan problem için performansları farklılık gösteren, çeşitli parçacık filteri tiplerinin; yakınsama hızı, kestirim hatası ve işlem kolaylığı gibi açılardan kıyaslaması yapılmış ve alınan sonuçlar çerçevesinde mevcut senaryoya en uygun çözüm önerilmiştir. Bu çerçevede erim ve açılı ölçümlerine dayanan hedef takibi uygulamaları gerçekleştirilmiştir.

SUMMARY

TARGET TRACKING WITH BAYESIAN METHODS

In this thesis we study a Bayesian estimation formulation of the target tracking problem. A Bayesian approach to tracking applications naturally leads to a recursive estimation formulation. The recently invented Particle Filter provides a numerical solution to the non-tractable recursive Bayesian estimation problems. As an alternative, traditional methods such as the Extended Kalman Filter, which is based on a linearized model and an assumption on Gaussian noise, yield approximate solutions. However, in highly nonlinear problems such as in our tracking applications, the EKF tends to be very inaccurate and underestimates the true covariance of the state.

In general the Sequential Monte Carlo Methods are adopted to and tracking applications and compared to traditional approaches. Particularly, the performance of different particle filtering methods are compared. In various target tracking applications, we extend or modify these particle filtering algorithms. Range-only tracking problem is addressed using Bayesian techniques and also the passive ranging application when only angle information is available is discussed.

1. GİRİŞ

Kestirim teorisi en genel haliyle gözlem değerlerini kullanarak parametre değerlerini kestirimi ile uğraşan bir istatistik ve sinyal işleme koludur. Matematiksel istatistik ise klasik ve Bayesçi olmak üzere iki ana paradigma kullanır. Klasik modelde kestirimi yapılacak parametreler deterministik kabul edilir. Bu yaklaşımda bir olayın olasılığı, ideal şartlar altında tekrarlanan deney sayısı sonsuza giderken, olayın gerçekleşme sıklığı olarak tanımlandığı için, literatüre “sıksalcı” yaklaşım olarak da geçmiştir. Deneyi yapan kişi gözlemcidir ve bu kişi hiçbir şekilde deneyin bir parçası değildir. Bu sebeble, klasik yaklaşımın bir diğer adlandırması “nesnel” yaklaşımdır.

Bu çalışmada hedef takibi Bayesçi teknikler kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Genel olarak, belirsizlik altında istatistiksel çıkarım yapmada ve karar vermede Bayesçi metotlar eksiksiz bir model oluşturmaktadırlar (Bernardo,2003). Ayrıca, Bayesçi metotlar aksiyomatik (belitsel) bir sistemden elde edilebildiği için tutarlı bir metodoloji sunarlar. Bu metotlarla, klasik istatistik metotlarında karşılaşılan birçok zorluk aşılabildiği için istatistiksel metotların uygulama alanı genişlemiştir. Bayesçi yaklaşımda kestirimi yapılacak parametre, rasgele kabul edilir ve bu kabulle rasgele değişkenin bir gerçekleşmesi kestirilmeye çalışılır. Eğer kestirimi yapılacak parametreye dair önsel bir bilgi mevcutsa, bayesçi teknikler bu bilginin kestirim sürecinin içine dahil edilmesini imkan verir ve böylelikle kestirimin doğruluğu yükseltilebilir (Kay, 1993). Bu özellik parametrelerin deterministik kabul edildiği klasik yaklaşımda olmayan bir artıdır. Buradan da anlaşılacağı gibi klasik yaklaşımın aksine deneyi yapan kişi deneye önsel bilgisi ya da fikriyle dahil olur. Bu sebeble bayesçi yaklaşım literatüre “özel yaklaşım” olarak da adlandırılır. Klasik yaklaşım deneye, bayesçi yaklaşım ise delile dayanan bir metodolojiyi esas alır (Bernardo, 1994).

İki yaklaşım bazı durumlarda aynı sonucu verse de bayesçi yaklaşımın klasik yaklaşıma kıyasla uygulanabilirlik açısından birçok üstünlüğü mevcuttur. Bayesçi metotlar analize sistematik varsayımların dahil edilemesini (önsel aracılığı ile) mümkün kılar ve klasik

metotların işletemeyeceği kadar karmaşık yapıları problemlerde kullanılabilir. Bu tezde uygulama tabanlı bir çalışma yapıldığı için iki yaklaşım arasındaki yöntemsel ve teorik farklar detaylı olarak ele alınmamıştır. Fakat bayesçi tekniklerin bu çalışmada kullanılmasının motivasyonunu oluşturan başlıklara tez boyunca yer verilecektir. İleriki bölümlerde yöntemler ele alınırken de değinileceği gibi Bayesçi formülizasyon, ilgilenilen parametrelere odaklanıp (nuisance/saçma parametreleri), diğerlerini integral dışına çıkarılarak kestirim yapılmasına matematiksel olarak imkan vermektedir (marjinalleştirme). Bu ise ele alınan sürecin boyutu düşüreceği için çözüme daha kolay ulaşılmasını sağlar. Başka bir açıdan ele alırsa; deney sayısının sonsuz kere tekrarlanamayacağı muhakkaktır, fakat bayesçi yaklaşımla, insanların öğrenme sürecine benzer şekilde, her yeni datadan ve alınan gözlemlerden sürece ve datanın değişen doğasına dair öğrenim elde edebilir ve bu öğrenim bir sonraki kestirim adımında kullanarak kestirim sonucu geliştirilebilir. Ayrıca bayesçi yaklaşım minimum varyans yansız (MVU) kestirimcinin bulunamadığı durumlarda kullanılabilir. Örneğin, bir yansız kestirimcinin varyansı uniform olarak diğer yansız kestirimcilerden küçük olmayabilir. Bu durumda, parametrenin birçok değeri için, karesel ortalama hatası diğer kestirimcilerle kıyasla daha küçük olacak bir kestirimci bulunabilir. Bu durumda parametreye önsel bir dağılım atayarak kestirimci için stratejiler geliştirebilir. Sonuç kestirimci ortalama veya seçilen önsel dağılıma referansla optimum olacaktır. Bu ve benzeri durumlar gibi klasik yaklaşımla sonuca ulaşamayacak birçok durum için, Bayesçi yöntemle sonuç elde edebilir veya fikir yürütebilir.

Tezde ele alınan uygulamalar, genel anlamda bir stokastik süreç filtreleme işidir. Bilinmeyen rasgele sürece ait gözlemler filtrelenerek, sürecin kestirimi yapılmaya çalışılır. Spesifik olarak ise rasgele değişen bir süreç olarak modellediğimiz, bir hedefe ait kinematik parametrelerinin farklı tipte ölçümler ve farklı filtreler kullanarak kestirimi gerçekleştirilmiştir. Bilinmeyen süreç rasgele olduğu için bu sürece ait gözlemler ve filtreleme sonucunda gözlemlerin bir fonksiyonu olarak oluşturulan kestirimci de rasgele olacaktır. Bu rasgele süreçlerin modellenmesi için hedef takibi probleminde yaygın olarak kullanılan durum-uzay modelleri kullanıldı. Bunun sebebi 2. bölümün ilk kısımda problemi matematiksel gösterimi verildikten sonra durum-uzay gösterimi üzerinde durulmuştur. Tezde, pratikte karşılaşılan birçok süreç durağan olmayan özellikler gösterdiği için, durağan olmayan süreçler üzerinde çalışıldı.

Bilindiği gibi rasgele süreçler durağan ve durağan olmayan süreçler olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Sürecin karakterizasyonunun ise çeşitli olasılık yasaları (Markov gibi) kullanılarak yapılması mümkündür. Eğer karakterizasyon için yeterli ise (Gauss dağılımında olduğu gibi) momentler de kullanılabilir. Bilinmeyen rasgele sürecin dinamik modeline ve gözlemlendiğimiz rasgele sürecin modeline göre, kullanılacak filtrenin tipi farklı olacaktır. Filtreleri bunlara bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayan, kesin veya yaklaşık olarak, gerçekleyebiliriz. Filtreleri, gelişim süreçlerine de bağlı olarak en genel haliyle aşağıdaki gibi sınıflandırmak mümkündür.

Tablo 1.1

Filtre Tipleri

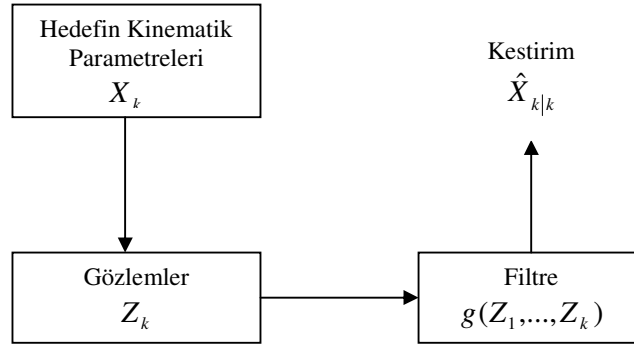
Süreç Tipi	Kestirimci Tipi	Filtre
(Geniş anlamda) Durağan	Doğrusal	Wiener Filtre
Durağan olmayan, doğrusal, Gauss- Markov model	Doğrusal	Kalman Filtre
Durağan olmayan, doğrusal olmayan Markov model	Yaklaşık doğrusal	EKF
Durağan olmayan, doğrusal olmayan Markov model	Monte Carlo	Parçacık Filtresi

Özetle bu çalışmada durum uzay modelleri ile gösterilen bir hedefe ait dinamik durumunun kestirimi, sensörlerden alınan ölçümler yardımıyla Bayesçi metotlar kullanarak yapıldı. Ölçümler zamanda sıralı olarak alındığı için kestirimi özyineli olarak gerçekleştirebilecek algoritmalar oluşturuldu. Bu amaçla sırasıyla, özyineli bayesçi çözümlerle ulaşılabilecek optimum kestirimi veren Kalman Filtre ve gerçeğe daha uygun senaryolarla oluşturulacak modellerin getirdiği sınırlar nedeniyle optimal çözümün bulunamadığı durumlar için önerilen yarı optimal bayesçi çözümler ele alındı. Bu filtreler ise EKF ve UKF gibi gauss yaklaşıklama esasına dayananlar ve de bunlardan daha genel modellere uygulanabilecek Sıralı Monte Carlo metotları olmak üzere iki grupta incelendi. Farklı hedef takibi senaryoları için farklı yöntemler sınanarak; kestirimin doğruluğu, yakınsama hızı ve matematiksel işlem kolaylığı açısından optimum algoritmalar önerildi.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. PROBLEMİN MATEMATİKSEL TARİFİ VE DURUM-UZAY MODELLERİ

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem zamanla değişen bir sistemin durumunun, alınan gürültülü gözlemler yardımıyla, bulunmasını gerektirir. Klasik hedef takibi probleminde de radardan veya sensörlerden ayrık zamanlarda alınan gözlemler, $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots\}$, kullanılarak hedefe ait hız ve erim gibi kinematikler, $\{X_0, X_1, \dots, X_k, \dots\}$, kestirilir. Bayeşçi yaklaşımdaki ana amaç o zamana kadar olan gözlemleri, $Z_{1:k}$, kullanarak sistemin o andaki durumunu x_k (rasgele sürecin bir gerçekleşmesi) kestirmektir. Genellikle gözlemler zamanda sıralı olarak gelir, bu suretle o ana ait durum kestirimini güncellemek mümkün olur.



Şekil 2.1: Filtreleme sürecinin Bileşenleri

Bu şekilde, bir sistemin durumunu kestirmek için sistem modelinin ve durumla ilişkili gözlem modelinin bilinmesi gereklidir. Aksi takdirde, öncelikle bayeşçi tekniklerle model seçimi yapılır, fakat burada ele alınan hedef takibi problemi için uygun model zaten daha önceden belirlenmiştir (Schon, 2003). Sistem dinamiği ve gözlemler durum-uzay modelleri ile gösterilmiştir. Durum uzayı sözcüğü köken olarak kontrol sistemleri alanından gelmektedir ve orada bilinmeyen süreç, kontrol edilen sistemin durumudur.

Durum bir kere kestirildikten sonra, sisteme uygun bir kontrol uygulanabilir. Durum-uzay modellerinde giriş sinyali (bilinmeyen), çıkış sinyali (gözlem) ve gürültü arasındaki ilişki birinci dereceden diferansiyel denklem ya da fark denklemleriyle gösterilir. Bu tezde gözlemler ayrık zamanlarda alındığı için, ayrık zamanlı durum uzay modellerini kullanılmıştır. Birçok sinyal işleme uygulamasında da ayrık-zamanlı modeller kullanılır veya sürekli zamanlı sistemlerin ayrık-zamanlığı karşılığı bulunur.

Her bir durum uzay modeli bir dinamik bileşen ve bir gözlenen bileşen içermektedir. Dinamik bileşen durumun, X_k , zamanla nasıl değiştiğini gösterirken; gözlem bileşeni, Z_k , gözlemlerin durumla ilişkisini verir. Kullanılan ayrık zamanlı, k anındaki durumun k-1 (bir önceki) anındaki ilişkisini veren, dinamik model en genel haliyle aşağıdaki gibidir:

$$X_k = f_k(X_{k-1}, W_k) \quad (2.1)$$

Burada $f_k(\cdot)$, durumu ve süreç gürültüsünü durum değerlerine eşleştiren vektör değerli bir fonksiyondur. W_{k-1} süreç gürültüsünü gösteren i.i.d bir süreçtir . Yani,

$$p_{W_k}(w) = p_{W_k'}(w) \quad \text{ve} \quad p(w_k, w_k') = p(w_k)p(w_k') \quad (2.2)$$

şeklinde. İleride ele alınacağı gibi özyineli filtre denklemleri, genellikle iki kabul üzerine oluşturulur. Bu kabuller rasgele bilinmeyen değişkenin Markov özelliğini sağladığı ve gözlemlerin hafızasız yani birbiriyle zamanda ilintisiz olduğu kabulleridir. Eğer bir süreç Markov özelliği gösteriyorsa, sürecin gelecekteki davranışını hesaplamak için kullandığımız t anındaki realizasyonu geçmişe dair tüm bilgiyi içeriyordur. Dolayısıyla gelecek için yapılacak tahminlerde sadece o anki realizasyona bakılması yeterli olacaktır.

$$p(x_k | x_{0:k}) = p(x_k | x_{k-1}) \quad (2.3)$$

Kolayca görüleceği gibi (2.1) denklemi bu özelliği sağlamaktadır yani X_k sadece X_{k-1} ve W_{k-1} 'ye bağlıdır. Bu sağlama ise kestirimde önemli kolaylık olan özyineli kestirimi mümkün kıldığı için durum-uzay modelinin bir artısını gösterir.

Filtre denklemleri oluşturulurken neredeyse her zaman yapılan bir diğer kabul ise “süreç gürültüsü” sürecinin W_0, W_1, \dots başlangıç durum değerinden X_0 bağımsız olduğudur. Bununla birlikte $p(x_0)$ dağılımının bilindiği varsayılır. Tüm bu kabuller ve durum dinamik denklemleri, durum sürecinin karakterize edilmesine imkanı verir.

En genel haliyle k anındaki gözlemleri k anındaki durumla ilişkilendiren gözlem modeli de aşağıdaki gibi gösterildi.

$$Z_k = h_k(X_k, V_k) \quad (2.4)$$

Burada $h_k(\cdot)$ durum ve gözlem gürültüsünü gözlem değerleriyle eşleştiren vektör değerli bir fonksiyondur. V_k gözlem gürültüsünü temsil eden i.i.d bir süreçtir.

Başta da belirtildiği gibi dinamik ve gözlem modeli için kullanılan bu gösterimler genel durum içindi. Burada eğer $f_k(\cdot)$ ve $h_k(\cdot)$ doğrusal ve W_k, V_k gürültüleri toplamsal ve Gauss dağılıma sahip ise aşağıdaki özel sınıf oluşur.

$$X_k = F_k X_{k-1} + W_k \quad (2.5)$$

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (2.6)$$

İleride filtreler ele alınırken bu özel sınıfın kolaylıkları gösterilecektir fakat burada daha sonra kullanmak üzere bazı basit eşitlikler elde edilmiştir. Eğer X_0 ve W_0, W_1, \dots ortaklaşa olarak gauss dağılımına sahipse ve sistem modeli (2.5) denklemindeki gibi doğrusal ise; bunun sonucunda X_1, X_2, \dots ve Z_1, Z_2, \dots de ortak olarak Gaussian olacaktır. Olasılık teorisinden de iyi bilindiği gibi normal dağılımın karakterizasyonu için sadece ilk iki momenti (ortalama ve varyans) yeterlidir. Bu durumda sadece ortalama ve varyans değerleri için güncelleme yapılabilir.

$m_{X_0} = E[X_0]$, $P_{X_0} = E[(X_0 - m_{X_0})(X_0 - m_{X_0})^T]$ olmak üzere $X_0 \sim N(m_{X_0}, P_{X_0})$ ve

$W_k \sim N(0, Q_k)$ iken $X_1 = F_1 X_0 + W_0$ olduğu için ortalaması,

$$m_{X_1} = F_0 m_{X_0} \quad (2.7)$$

ve varyansı,

$$\begin{aligned} P_{X_1} &= E \left[(X_1 - m_{X_1})(X_1 - m_{X_1})^T \right] \\ &= E \left[(F_1 X_0 + W_0 - F_1 m_{X_0})(F_1 X_0 + W_0 - F_1 m_{X_0})^T \right] \\ &= E \left[(F_1 [X_0 - m_{X_0}] + W_0)(F_1 [X_0 - m_{X_0}] + W_0)^T \right] \\ &= F_1 P_{X_0} F_1^T + Q_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde olacaktır. Bunlara ait özyinelemeler de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} m_{X_k} &= F_k m_{X_{k-1}} \\ P_{X_k} &= F_k P_{X_{k-1}} F_k^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aynı işlemleri gözlemler için de yapacak olursa aşağıdaki tekrar eşitliklerini elde eder:

$$\begin{aligned} m_{Z_k} &= H_k m_{X_k} \\ P_{Z_k} &= H_k P_{X_k} H_k^T + R_k \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. BAYESÇİ KESTİRİM

DeneySEL ve gözlemsel çıktılar genellikle $D = \{z_1, \dots, z_n\}$ şeklinde gösterilebilecek, bir bakıma homojen ve muhtemelen çok boyutlu z_i data setlerinden oluşur. İstatiksel metotlar tipik olarak bunları, sürecin doğasına ait bilgi edinmek ve yine aynı sürecin gelecekteki davranışına dair fikir yürütmek için kullanırlar. Herhangibir istatiksel analizin merkezinde, gözlemlenen D datayı üreten mekanizmayı açıklayacak bir olasılık modeli tanımlayabilmek vardır. Matematiğin diğer dallarından farklı olarak, istatiksel çıkarım için kullanılan klasik metotlar aksiyomatik bir temelden yoksundur. Dolayısıyla önerilen yollar tamamen uyuşmaz ve aynı datanın analizinde uygulanacak farklı prosedürler birbiri ile çelişen sonuçlar doğurabilir (Lindley, 1972). Bayesçi metotlar ise istatiksel çıkarımda, mantıksal bir yapıda birleştirici ve önerilen metotların tamamen tutarlılığını garanti eden, kesinkes aksiyomatik temellere dayanır.

Bayes' teorimi Thomas Bayes (1701-1761) tarafından oluşturulmuştur. Bu teorem üzerine ilk makale Bayes'in ölümünden sonra, Prince tarafından (1763) yazılmıştır. Bayesçi yaklaşım, tekniklerinin Bayes' teoremi üzerinden oluşturulmasından dolayı bu adla anılır. Bayes formülü aslında şartlı olasılığın sıradan bir sonucudur. A ve B gibi iki olay ele alınsın: $P(A \text{ ve } B) = P(A|B)P(B)$ olarak yazılabilir. Aynı şekilde, $P(A \text{ ve } B) = P(B|A)P(A)$ olarak da yazılabilir. Bu iki eşitli taraf tarafa eşitlenirse,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.11)$$

olarak Bayes' teoremi elde edilmiş olur. Bayes formülünden görüldüğü gibi bayesçi yaklaşım olasılığın koşullu doğasına dayanır. Bir bayesçi için olasılık inanç düzeyidir ve kişilerin bilgisine koşulludur, bu sebele kişiden kişiye değişebilir. Yani bayes kelimesinin türkçe karşılığı gibi "yanlı"dır. Bu yanlılığın asıl olarak "önsel" kaynaklıdır. Bir anlamıyla olasılık varlıkbilim değil bilgi kuramıdır. Doğası gereği olasılık kavramı her zaman koşulludur. Birşeye yapılacak atamalar aslında her zaman atamayı yapan kişinin bilgisine bağlıdır. O kişiden farklı bilgi birikimine sahip başka bir kişi pek tabii olarak ataması yapılan duruma farklı bir olasılık tayin edecektir. İşte bu, var olduğu kabul edilen fakat her zaman beyan edilmeyen bir arka plan bilgisi; incelediğiniz duruma göre mesela; matematiğin nasıl kullanıldığı, fizik ve astroloji bilgileri, çocukluktan beri edinilen birikimlerden oluşabilir. Her zaman var olan bu bilginin ihmali veya olmaması ise olasılık teorisinde çelişkilere sebep olabilir. Bu bilgiyi H harfi ile sembolize edip, bazı olasılık aksiyomlarını ele alalım. $P(A|H)$, H'ın doğru olarak verildiği durumda A'nın doğru olma olasılığı olarak okunur. Gerçek bir sayıdır ve aşağıdaki olasılık aksiyomlarını sağlar:

- $0 \leq P(A|H) \leq 1$
- $P(A|A, H) = 1$
- $P(A|H) + P(\sim A|H) = 1$

burada $\sim A$, A'nın olumsuzunu simgeliyor. Çarpım kuralı ve koşullu olasılığın tanımını kullanarak, $P(B|H) \neq 0$ iken

$$P(A \& B|H) = P(A|B \& H)P(B|H) \quad (2.12)$$

Eğer A ve B birbirini dışlayan iki durumsa çaprim kuralını kullanarak, $P(A \text{ ya da } B|H) = P(A|H) + P(B|H)$ olur.

θ bilinmeyen durum, D datayı simgelemek üzere ve $p(D) \neq 0$ iken tekrar Bayes' teoremini yazılırsa,

$$P(\theta|D) = \frac{P(\theta \& D)}{P(D)} = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)} \propto P(D|\theta)P(\theta) \quad (2.13)$$

İlgilenilen parametre θ olduğu için bayes formülünü yardımıyla datalar kullanılarak, yani dataların verildiği durumda, θ nın dağılım fonksiyonunu oluşturuldu. Görüldüğü gibi paydadaki terim θ dan bağımsızdır ve soldaki dağılımın toplam olasılığının 1 olması için normalizasyon terimi olarak düşünülebilir. Bu yüzden sadece bir sabit olduğu için ilerde kullanılacak filtre eşitliklerinde çoğu zaman ihmal edilecektir. $P(D|\theta)$ klasik kestirim metodlarından da bildiği gibi olabirlik fonksiyonudur. Buradaki büyük ayırım θ rasgele değişken olmasıdır. $P(\theta)$ ise önsel dağılım olarak adlandırılır, en başta da belittildiği gibi bu dağılımla bilinmeyenler hakkındaki önsel bilgi temsil edilir ve kestirim sürecinin içine katılır. $P(D)$; bilinmeyen durum θ ve datanın D bileşik dağılımını marjinalize ederek bulduğumuz dağılımdır ve bayesçi terminolojide “kanıt” olarak adlandırılır. $P(\theta|D)$ dağılımı ise bilinmeyene dair tüm çıkarımlarımızı yapacağımız “sonsal dağılım”dır. Özetle, “sonsal \propto önsel \times olabirlik” dir.

2.2.1. Önsel Bilgi

Kestirim teorisinin temel kurallarından biri; önsel bilginin kullanımının daha doğru kestirimle sonuçlanacağıdır. Örnek olarak, eğer parametre bilinen bir aralıkta olmak zorunda ise, herhangi iyi bir kestirimci bu aralıktan kestirimler üretecektir. -5V ile +5V değerleri arasında gerilim üreten bir kaynağın anlık çıkışını kestirirken sonucu daha geniş bir aralıkta aramak mantıksız olacaktır ve matematiksel olarak kolayca gösterilebileceği gibi sınırlı aralık için yapılan kestirimin hatası her durumda diğerine

kıyasla daha düşük hatalı olacaktır (Kay,1996). Sınırlar bu durumda bir önsel bilgidir ve kullanımı kestirimin doğruluğunu artırır. Aynı şekilde hedef takibi problemi için hedefin izleyebileceği yolun fiziksel sınırları, harita bilgisi veya hedefin hız limitleri bu önsel bilgiyi oluşturabilir. Ayrıca bu çalışmada uygulaması yapılan açı bilgisiyle hedef takibi probleminde kabul edilen önsel bilgi, hedefin takibini mümkün kılmıştır. Uygulamada hedef takibi hareketsiz gözlem platformundan alınan açı bilgisiyle hedefin konum ve hız parametreleri kestirildi. Fakat gözlemlerin sadece açı olduğu bir problemde hedefin konumunu ve erimini takip etmenin bir takım zorlukları vardır. Bu sıkıntı fiziksel bir kısıttan kaynaklanmaktadır: Doğrultusu aynı olmak üzere bu doğrultudaki tüm hedefler için aynı açı bilgisini gözlemlenecektir ve dolayısıyla buradan net bir erim hesaplamak mümkün değildir. Bu durumda bir çözüm gözlem platformunu hareketlendirip, bağıl çıkarımlar yapmaktır. Burada ise sabit bir gözlemciden bilgi alındığı için, hedefin ilk konumunu bildiğimiz kabulüyle hedef takibini yapıldı. Aksi halde çözüme ulaşmak bu problem özelinde mümkün olmayacaktı.

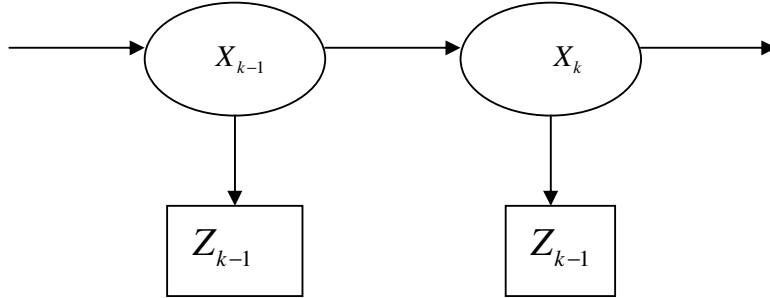
Bayesçi kestirim için önsel bilginin doğru seçimi büyük önem taşır. Seçilecek önsel dağılım gözlemler elimize geçmeden önce bilinmeyen parametreler hakkındaki mevcut tüm bilgileri en iyi şekilde tasvir edebilmelidir. Probleme göre matematiksel kolaylık sağlayacak önsel dağılımlar da seçilebilir fakat elde sonucu etkileyecek sağlam dayanaklarımız mevcutsa, varsayılan dağılımlar yerine, bunları sürece dahil etmek daha verimli olacaktır. Eğer elimizde dayanaklarımız yoksa uygun önsellerin nasıl seçilmesi gerektiği üzerine literatürde, çeşitli argümanlarla, birçok çalışma yapılmıştır (Gelman 1995, Gabrielle 2007). Burada bunlara ele aldığımız problem gereği değinme gereği duyulmadı. Çünkü hedef takibi problemi için, daha karmaşık data analiz süreçlerine kıyasla, kabul edilen önseller tatmin edicidir. Ama en genel haliyle sürece dair hiçbir bilgi yoksa önsel olarak, bilgi vermeyen (uniform dağılım gibi) dağılımlar kullanılıp, kestirim süreci içinde datadan öğrenerek önsel bilgi geliştirilebilir. Yani bir önceki adımdaki sonsal dağılım bir sonraki adımda önsel dağılım olarak kullanılabilir. Fakat bazen bu durum sonuca yakınsamayı geciktirmektedir veya yanlış önsel seçimi kötü kestirimcilerle sonuçlanabilir.

Bayes formülü bütünlüklü olarak ele alınırca, sonsal dağılım üzerinde önselin etkisi kadar olabilirlik fonksiyonunun da etkisi olduğu görülür. Zira sonsal, önselle

olabilirliğin çarpımından oluşmaktadır. Olabilirlik fonksiyonu ise doğrudan ölçümlerle ilgilidir. Eğer önsel bilgi dataya göre daha zayıfsa yapılan kestirimdeki önselin etkisi ihmal edilebilir. Ters durumda ise, yani ölçümlerimiz azsa, kestirimci önsel dağılımın ortalaması etrafında “yanlı” olacaktır. Bu bayesçi sezgilerle önceden kestirilebilecek bir sonuçtur; data kaydınız ne kadar uzunsa, yani ne kadar çok ölçüm yapmışsanız süreç hakkındaki cehaletiniz o kadar azalır.

2.2.2. Özyineli Kestirim

En başta Kalman filtre olmak üzere, bu tezde kullanılan filtreler özyineli kestirim esasına dayanır. Özyineli kestirimin en önemli avantajı kestirimcilerin, durum kestirimi yapmak için sadece o andaki ölçüme ve bir zaman adımı öncesinde bulunan durum kestirimine ihtiyaç duyulmasıdır. Yığın (batch) kestirim tekniklerindeki gibi, tüm geçmiş gözlemler ve/veya kestirimlere ihtiyaç yoktur. Bu bilgilerin bir yerde depolanması gerekmez ve işlem yükü hafifleyip kestirim hızı artacağı için anlık çevrim-içi kestirimler yapılabilir. Bu özellikte hedef takibi uygulamaları için gerekli ve önemli bir özelliktir.



Şekil 2.2: Özyineli Kestirim

Bayes formülü süreç modellerini kullanarak ve yoğunlukları manipüle ederek (marjinalleştirme, faktörize ederek) $p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$ dağılımından $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımını oluşturmamıza imkan verir.

$$\begin{aligned}
 p(x_{0:k} | z_{1:k}) &= \frac{p(x_k, z_k, x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{k-1})} = \frac{p(x_k, z_k, x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}{\int p(x_k, z_k, x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) dx_{0:k}} \\
 &= \frac{p(x_k, z_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}{\int p(x_k, z_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) dx_{0:k}}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Buradaki $p(x_k, z_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1})$ dağılımı modellerden elde edilir. Daha açık görülebilmesi için dağılımı faktörize edilirse,

$$p(x_k, z_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) = p(z_k | x_k, x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) \quad (2.15)$$

Özyineli filtre denklemleri genellikle iki kabul üzerine oluşturulur. Rasgele bilinmeyen değişkenin Markov özelliğini sağladığı ve gözlemlerin hafıssız yani birbiriyle zamanda ilintisiz olduğu kabul edilir. Markov kabulü ile,

$$p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \quad (2.16)$$

olarak yazılabilir. Hafıssızlık kabulüyle ise,

$$p(z_k | x_k, x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) = p(z_k | x_k) \quad (2.17)$$

olarak yazılır. (2.16)- (2.17) Bu iki denklem (2.15)'de yerine konulursa sonsal dağılım için özyineleme eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p(x_{0:k} | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}{\int p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) dx_{0:k}} \quad (2.18)$$

Genellikle, sadece X_k 'nin kestirimi ile ilgilenilir, bu sebeple sonsal dağılımın marjinali $p(x_k | z_{1:k})$ alınır. (2.18) denklemi ile özetlenen işlem filtrelerde genellikle iki aşamda gerçekleştirilir. Yaygın kullanımıyla bu adımların, ilki “tahmin”, ikincisi ise “güncelleme” olarak adlandırılır. Bir önceki zaman adımına ait sonsal $p(x_k | z_{1:k})$ dağılımının bilindiği kabulüyle, tahmin dağılımı Chapman-Kolmogorov faktörizasyonu kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$p(x_k | z_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}) dx_{k-1} \quad (2.19)$$

Bayes' teoremi kullanılarak k anında alınan yeni gözlem ile, gözlem alınmadan önce yapılan tahmin güncellenir.

$$p(x_k | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{\int p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1}) dx_k} \quad (2.20)$$

2.2.3 Optimal Bayeşçi Filtreleme

Klasik kestirimde olduğu gibi burada da bir maliyet fonksiyonu oluşturulup olası kestirimcilerin başarımı, bu fonksiyona göre karşılaştırılabilir. Burada klasik yaklaşımdan farklı olarak, rasgele değişkenlerle uğraşıldığı için yorumlar “beklenen değer” kavramı üzerinden oluşturulacaktır. Maliyet fonksiyonu kestirim hatalarına ceza ataması yapar: $C(\hat{x}_{k|k}, x_k)$.

Hata karesel olduğunda maliyet fonksiyonu quadratic olacaktır (büyük hataların maliyeti çok daha büyük). Maliyet fonksiyonu karesel hata olduğunda, bu kritere göre bulunana optimal kestirimci MMSE (en küçük ortalama karesel hata) kestirimcisi olarak adlandırılır.

$$C(\hat{x}_{k|k}, x_k) = (x_k - \hat{x}_{k|k})^T (x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (2.21)$$

Tabii ki bu seçim karesel fonksiyonlarla sınırlı değildir, matematiksel kolaylık için istenen şekilde hata fonksiyonu oluşturulabilir. Bunlardan yaygın olarak kullanılanları:

$C(\hat{x}_{k|k}, x_k) = |x_k - \hat{x}_{k|k}|$ mutlak hata veya,

$$C(\hat{x}_{k|k}, x_k) = \begin{cases} 0, & |x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \varepsilon \\ 1, & |x_k - \hat{x}_{k|k}| > \varepsilon \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde eşik (“hepsi ya da hiçbiri”) hata olabilir. Bu eşik hatayı minimize edecek kestirimciler ise, MAP(sonsal dağılımı maksimize eden) kestirimci olarak adlandırılır. Yani, MMSE kestirimci $p(x_k | z_{1:k})$ sonsal dağılımın ortalaması iken MAP kestirimci bu dağılımı maksimize eden x_k değeridir.

Amaç beklenen maliyeti küçültecek şekilde kestirimci için fonksiyonel formun bulunmasıdır.

$$E_{X_{0:k}, Z_{1:k}} [C(\hat{X}_{k|k}, X_k)] = E_{X_{0:k}, Z_{1:k}} [C(g(Z_{1:k}), X_k)] \quad (2.23)$$

Beklenen maliyet aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$E_{Z_{1:k}} \left[E_{X_{0:k} | Z_{1:k} = z_{1:k}} \left[C(g(z_{1:k}), X_k) \right] \right] \quad (2.24)$$

Herbir $z_{1:k}$ değeri için koşullu beklenen maliyeti düşürecek $g(\cdot)$ seçilir. Ayrıca ortalama maliyet, Bayes' risk olarak da adlandırılır. Genel olarak, optimal bayes kestirimcinin hesaplanması $p(x_k | z_{1:k})$ veya $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımlarının analitik olarak hesaplanmasını gerektirir.

Optimal bayesçi kestirime ulaşmak için iki farklı strateji izlenebilir. Ya sonsal dağılım oluşturularak bunun üzerinden beklenen değer hesabı ile koşullu ortalama ve kovaryans bulunur ya da direk olarak koşullu ortalama ve koşullu kovaryans kullanılarak MMSE kestirimci hesaplanabilir. İlk yol, doğrusal olmayan non-gaussian sistem modelleri gibi daha genel durumlar için izlenir ve matematiksel yükü fazladır. Maliyet fonksiyonu herhangi bir fonksiyon alınabilir. Çoğu kez çözüme analitik olarak ulaşmak mümkün değildir ve çeşitli stokastik veya deterministik yaklaşımlarla ulaşılmaya çalışılır. Filtreleme bu durumda sub-optimal olacaktır. Bu tip problemler için yaklaşımlar diğer bölümde incelenecektir.

İkinci yöntem durum ve gözlem denklemlerinin doğrusal ve belirsizliklerin gauss dağılımla modellenbildiği durumlar için uygulanabilir. Sistemdeki gürültülerin Gauss olmadığı durumlarda da, sistem modeli doğrusal olmak koşuluyla optimal kestirimci yine bulunabilir. Bu kestirimciye LMMSE kestirimci denir. LMMSE ve MMSE kestirimcileri hesaplayabilmek için sadece birinci ve ikinci dereceden momentlerin bilinmesi yeterlidir. Birçok farklı yolla bu kestirimciler hesaplanabilir. Bunlardan biri Gauss dağılımlarının özelliklerinden yararlanarak, sonsal yoğunluk dağılımının hesaplanmasına dayanır. Bu yöntem uzun sürdüğü için burada ele alınmamıştır veya Bmse kavramından yararlanarak bulunabilir (Kay 1993). Bir diğer metot ise diklik prensibinden yararlanmaktır. Adından da anlaşıldığı gibi bulunacak kestirimci, en küçük hataya sahip olmalıdır, ve bunu sağlayabilmesi için hatasının gözlem uzayına dik olması gerekir. MMSE kestirimci de kestirim hatası gözlemlere veya gözlemlerin herhangi bir fonksiyonuna diktir. LMMSE kestirimci de ise sadece gözlemlere diktir. Kestirim hatasını yazarsak,

$$\begin{aligned}
& E_{x_{0:k}, z_{1:k}} \left[\left(\hat{X}_{k|k} - X_k \right)^T \left(\hat{X}_{k|k} - X_k \right) \right] \\
&= \int p(z_{1:k}) \left[\int \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right)^T \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right) p(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_{0:k} \right] dz_{1:k} \\
&= \int p(z_{1:k}) \left[\int \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right)^T \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right) p(x_k | z_{1:k}) dx_k \right] dz_{1:k}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

İçteki integral her zaman pozitif olacağından; beklenen karesel hatayı küçültmek için, herbir $z_{1:k}$ değeri için $\hat{x}_{k|k}$ değeri seçerek köşeli parantez içindeki değer küçültülmeye çalışılır. Bu terimi küçültecek $\hat{x}_{k|k}$ kestirimci değerini bulmak için, köşeli parantezin içindeki terimin türevi alınıp sonuç sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[\int \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right)^T \left(\hat{x}_{k|k} - x_k \right) p(x_k | z_{1:k}) dx_k \right]}{\partial \hat{x}} \\
&= \int 2 \left(\hat{x} - x_k \right) p(x_k | z_{1:k}) dx_k \\
&= 2 \int \hat{x} p(x_k | z_{1:k}) dx_k - 2 \int x_k p(x_k | z_{1:k}) dx_k \\
&= 2\hat{x} - 2E_{x_k | z_{1:k}} [X_k] = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Bu \hat{x} için çözümlürse,

$$\hat{x}_{k|k} = E_{x_k | z_{1:k}} [X_k] \tag{2.28}$$

olarak bulunur. Yani ispatlandığı gibi, karesel ortalama hatayı minimize eden optimal kestirimci, sonsal dağılımın beklenen değeridir. Yine diklik şartı kullanılarak LMMSE kestirimci bulunabilir. Doğrusal kestirimcinin formu $\hat{X} = KZ$ şeklinde alınsın ve karesel hatayı minimize edecek K değeri bulmaya çalışılsın. Diklik koşulu bu kestirimci için yazılırsa:

$$E_{XZ} [Z\tilde{X}^T] = E_{XZ} [Z(X - \hat{X})^T] = E_{XZ} [Z(X - KZ)^T] = 0 \tag{2.29}$$

buradan

$$K = (P_{XZ} + m_x m_z^T) (P_{XZ} + m_x m_z^T)^{-1} \tag{2.30}$$

olarak bulunur. Fakat bu kestirimcinin istenmeyen bir karakteristiği vardır. Bu kestirim kolaylıkla görülebileceği gibi yanlıdır. Yansız kestirimcinin bulunabilmesi için, LMMSE kestirimciye biası yok edecek şekilde bir b sabiti eklenir: $\hat{X} = KZ + b$. Kestirimcinin yine doğrusal şekilde oluşturulabilmesi için gözlem vektörünün boyutunu büyütülürse, $\tilde{Z} = \begin{bmatrix} Z \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\tilde{K} = [K \ b]$,

$$E_{XZ} \left[(X - \tilde{K}\tilde{Z})\tilde{Z}^T \right] = 0 \quad (2.31)$$

(2.31) denklemini K ve b için çözersek yansız kestirimci aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{X} = m_x + P_{XZ}P_z^{-1}(Z - m_z) \quad (2.32)$$

Bu yansız kestirimciye ait hata kovaryans matrisi de şöyle bulunur: $\tilde{X} = X - \hat{X}$ hata olmak üzere kestirimci yansız olduğu için $E_{XZ}[\tilde{X}] = 0$ yazılabilir. Dolayısıyla hata kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} P_{\tilde{X}} &= E_{XZ}[\tilde{X}\tilde{X}^T] \\ &= E_{XZ} \left[\left(X - m_x - P_{XZ}P_z^{-1}(Z - m_z) \right) \left(X - m_x - P_{XZ}P_z^{-1}(Z - m_z) \right)^T \right] \\ &= E_{XZ} \left[(X - m_x)(X - m_x)^T \right] - E_{XZ} \left[(X - m_x)(Z - m_z)^T P_z^{-1}P_{XZ}^T \right] \\ &\quad - E_{XZ} \left[P_{XZ}^T P_z^{-1}(Z - m_z)(X - m_x)^T \right] \\ &\quad + E_{XZ} \left[P_{XZ}^T P_z^{-1}(Z - m_z)(Z - m_z)^T P_z^{-1}P_{XZ}^T \right] \\ &= P_X - P_{XZ}P_z^{-1}P_{XZ}^T - P_{XZ}P_z^{-1}P_{XZ}^T + P_{XZ}P_z^{-1}P_ZP_z^{-1}P_{XZ}^T \\ &= P_X - P_{XZ}P_z^{-1}P_{ZX} \end{aligned} \quad (2.33)$$

şeklinde olur.

2.3. KALMAN FİLTRELERİ

Öncelikle burada, daha sonra eşitlikleri elde edilecek olan filtrelere temel oluşturmak için özyineli kestirimci geliştirilecektir. Bunu yapmak için “yenilik” dizileri kavramından yararlanılmıştır. Yenilik dizisi; her yeni gözlemle gelen yeni bilgiyi tarif eder ve bu nedenle yenilik süreci, gözlem sürecinin doğrusal bir fonksiyonu olarak

gösterilebilir. Yenilik kavramı üzerinden yola çıkılmasındaki ana fikir, adının da yansıttığı gibi, yenilik dizilerinin birbirleriyle ilintisiz olması ve bu ilintisizliğin daha sonra oluşturulacak filtre eşitlikleri için kolay formülizasyonlar yapma imkanı vermesidir. Yeni bilgi, diğeriyle aynı olmayandır, yani eskilere diktir. Burada kestirimciyi özyineli bir şekilde oluştururken bu basit ama kurnazca yaklaşımın nasıl bakışı kolyalaştığı üzerinde biraz durulacaktır. Bu kısımda genel gösterime sadık kalarak rasgele değişken “X” büyük harfiyle ve gerçekleşmesini “x” harfi ile gösterildi. Aynı şekilde “Z” gözlemleri, “z” ise bu değişkenin bir gerçekleşmesini göstermektedir. Elde Z_1 den Z_k 'a kadar k adet gözlem olduğunu kabul edilsin. Her bir zaman adımında gözlemler vektör olarak elde edilsin ve bunlar kullanılarak X özyineli olarak kestirilmeye çalışılsın. Gözlem vektörü $Z = [Z_1 \cdots Z_k]^T$ şeklinde olsun ve buradaki her Z_i p boyutlu olsun. Bu durumda Z pk boyutlu olacaktır. Z_1 'den Z_i ye kadar olan gözlemleri kullanarak hesaplamak X kestirimi de \hat{X}_i olarak gösterilsin. Amaç, \hat{X}_i ve Z_i yi kullanarak \hat{X}_{i+1} i elde etmektir. Başlangıç için, $i \neq j$ iken Z_i in Z_j ile ilintisiz olduğu kabul edilsin (Bir sonraki kısımda, yenilik dizilerini oluşturulurken ve kullanılırken, bu kabulün nedeni daha iyi anlaşılacaktır). Eğer Z_i , Z_j ile ilintisiz ise ilinti matrisi diagonal olacaktır: $P_Z = \text{diag}(P_{Z_1}, \dots, P_{Z_k})$. Burada $P_{Z_i} = E \left[(Z_i - m_{Z_i})(Z_i - m_{Z_i})^T \right]$ $pk \times pk$ boyutlu blok diagonal matristir. Daha önce ispatı yapıldığı gibi X'in optimal (MMSE) kestirimcisi (2.32) denklemindeki gibidir. Kestirimin hata kovaryans matrisi ise (2.33) denklemi ile verilmişti. Kestirimi hesaplayabilmek için;

$$P_{XZ} = E \left[(X - m_X)(Z - m_Z)^T \right] = \left[P_{XZ_1} \cdots P_{XZ_k} \right] \quad (2.34)$$

$$P_Z^{-1} = \text{diag}(P_{Z_1}^{-1}, \dots, P_{Z_k}^{-1}) \quad (2.35)$$

(2.34) ve (2.35) denklemleri , (2.32) denkleminde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= m_X + [P_{XZ_1} \cdots P_{XZ_k}] \begin{bmatrix} P_{Z_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{Z_2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_{Z_k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 - m_{Z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_k - m_{Z_k} \end{bmatrix} \\
&= m_X + [P_{XZ_1} P_{Z_1}^{-1} \cdots P_{XZ_k} P_{Z_k}^{-1}] \begin{bmatrix} Z_1 - m_{Z_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_k - m_{Z_k} \end{bmatrix} \\
&= m_X + \sum_{i=1}^k P_{XZ_i} P_{Z_i}^{-1} (Z_i - m_{Z_i})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

olarak bulunur. Bu denklem yinelemenin başlangıç değeri $\hat{X}_0 = m_X$ alınarak özyineli olarak aşağıdaki gibi,

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + P_{XZ_{i+1}} P_{Z_{i+1}}^{-1} (Z_{i+1} - m_{Z_{i+1}}) \tag{2.37}$$

\hat{X}_k kestiriminin hata ilinti matrisi de aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned}
P_{\hat{X}_k} &= P_X - P [P_{XZ_1} \cdots P_{XZ_k}] \begin{bmatrix} P_{Z_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{Z_2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_{Z_k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Z_1 X} \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{Z_k X} \end{bmatrix} \\
&= P_X - \sum_{i=1}^k P_{XZ_i} P_{Z_i}^{-1} P_{Z_i X}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Yine bunu da yinelemenin başlangıç değeri $P_{\hat{X}_0} = P_X$ olacak şekilde, özyineli olarak yazabilir:

$$P_{\hat{X}_{i+1}} = P_{\hat{X}_i} - P_{XZ_{i+1}} P_{Z_{i+1}}^{-1} P_{Z_{i+1} X} \tag{2.39}$$

Gözlemlerin ilintisiz olduğu durumda yineleme eşitliklerini yukarıdaki gibi kolayca elde edebilir. Fakat tahmin edilebileceği gibi, çoğunlukla gözlemler ilintilidir. Bu durumda, gözlemlerin birbirinden ilintisiz olan kısımlarına (inavasyonlara) bakarak yukarıdaki gibi eşitlikler elde oluşturulabilir. Buradan hareketle, ilintisiz vektörlerden oluşan

inavasyon dizisi vektörü $\eta = [\eta_1 \cdots \eta_k]$ şeklinde olsun. Yenilikler aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır:

- $E[\eta_i] = 0$
- η_i Z_1 'den Z_i 'e kadar olan gözlemlerin lineer bir fonksiyonudur, tersi de doğru olmak üzere; Z_i , η_i den η_i kadar olan yeniliklerin lineer fonksiyonu olarak yazılabilir.
- $i \neq j$ için η_i ve η_j birbirlerine dik olduğu için P_η kovaryans matrisi, blok diagonal bir matristir.

Z_i ' in Z_1 den Z_{i-1} e kadar olan gözlemler kullanılarak oluşturulmuş MMSE kestirimi $\hat{Z}_{i|i-1}$ ile gösterilsin. O zaman yenilik de gözleme bağlı olarak, $\eta_i = Z_i - \hat{Z}_{i|i-1}$ tanımlanabilir. Bu tanımlamayla yukarıda verilen yenilik özelliklerinin doğrulamasını yapabilir:

- $\hat{Z}_{i|i-1}$, Z_i 'in yansız kestirimi olduğu için, $E[\eta_i] = 0$
- $\hat{Z}_{i|i-1}$, Z_1 ' den Z_{i-1} ' e kadar olan gözlemlerin lineer bir fonksiyonu olduğu için, η_i nin de Z_1 den Z_{i-1} e kadar olan gözlemlerin lineer bir fonksiyonu olacağı açıktır.
- $j < i$ için η_i nin η_j ye dik olduğunu göstermek için diklik prensibinden yararlanılır:

$$E\left[(Z_i - \hat{Z}_{i|i-1})(Z_j - m_{Z_j})^T\right] = 0 \quad 1 \leq j < i \text{ için}$$

$$\eta_j = Z_j - Z_{j|j-1} = Z_j - m_{Z_j} - P_{Z_j, Z_{j-1}} P_{Z_{j-1}}^{-1} \begin{bmatrix} Z_1 - m_{Z_1} \\ \cdots \\ Z_{j-1} - m_{Z_{j-1}} \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla diklik kuralı ile,

$$E[\eta_i \eta_j^T] = E\left[(Z_i - \hat{Z}_{i|i-1}) \eta_j^T\right] = 0 \text{ olur.}$$

Şimdi elde Z_1 den Z_k olan gözlemler kullanarak elde edilmiş η yenilik dizisini varsa \mathbf{X} in özyineli kestiriminin nasıl yapılacağına bakalım. Yeniliklerin birbiriyle ilintisiz ve sıfır ortalamalı oldukları sonucunu kullanılarak, minimum ortalama karesel hatalı kestirimci;

$$\hat{X} = m_x + P_{x\eta} P_\eta^{-1} \eta = m_x + \sum_{i=1}^k P_{x\eta_i} P_{\eta_i}^{-1} \eta_i \quad (2.40)$$

Kestirimci için ve hata ilintisi için özyineli eşitlikler, denklem (2.41)' deki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i+1} &= \hat{X}_i + P_{x\eta_{i+1}} P_{\eta_{i+1}}^{-1} \eta_{i+1} \\ P_{\hat{X}_{i+1}} &= P_{\hat{X}_i} - P_{x\eta_{i+1}} P_{\eta_{i+1}}^{-1} P_{\eta_{i+1}x} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Yinelemeli kestirimcinin oluşturulması için, $P_{x\eta_i}$ ve $P_{\eta_i}^{-1}$ ilinti matrislerinin hesaplanması gereklidir. Devamında, sadece gözlemlerin duruma, \mathbf{X} , doğrusal olarak bağlı olduğu sınıf üzerinde yinelemeli kestirim modeli üzerinde duracaktır. Böylelikle bu bölümde ele alınacak Kalman Filtrenin eşitliklerinin elde edilmesi daha kolay olacaktır. Bu durumda, yani gözlemlerin bilinmeyen duruma doğrusal olarak bağlı olduğu durumda, model $Z_i = H_i X + V_i$ şeklinde oluşturulmuştur. Öncelikle, yenilik dizisinin ilk iki elemanını ve bunlar yardımıyla X ' in ilk iki kestirimi elde edilecektir. Daha sonra ise buradan hareketle genel bir formül oluşturulacaktır.

$$E[Z_i] = E[H_i X + V_i] = H_i m_x \quad (2.42)$$

Şimdi ilk inavasyon η_1 ve buradan da ilk kestirimciyi \hat{X}_1 'i hesaplarırsa,

$$\eta_1 = Z_1 - \hat{Z}_{1|0} = Z_1 - m_{z_1} = Z_1 - H_1 m_x \quad (2.43)$$

Bu aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\eta_1 = H_1 (X - m_x) + V_1 \quad (2.44)$$

(2.40) denklemi gereğince \hat{X}_1 'i hesaplayabilmek için öncelikle $P_{x\eta_1}$ ve P_{η_1} ilinti matrislerini bulmalıdır.

$$P_{x\eta_1} = E[(X - m_x) \eta_1^T] = E[(X - m_x) (H_1 (X - m_x) + V_1)^T] = P_x H_1^T \quad (2.45)$$

Burada X 'in ve V_1 bağımsız olmasından yararlanıldı.

$$\begin{aligned}
P_{\eta} &= E[\eta_1 \eta_1^T] = E\left[(H_1(X - m_x) + V_1)(H_1(X - m_x) + V_1)^T \right] \\
&= H_1 P_x H_1^T + R_1
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ve bunları kullanarak kestirimci

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= m_x + P_{x\eta} P_{\eta}^{-1} \eta_1 \\
&= m_x + P_x H_1^T (H_1 P_x H_1^T + R_1)^{-1} (Z_1 - H_1 m_x) \\
&= \hat{X}_0 + P_x H_1^T (H_1 P_x H_1^T + R_1)^{-1} (Z_1 - H_1 \hat{X}_0)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

olarak bulunur. Böylelikle $\hat{X}_0 = m_x$ gerçeğini kullanarak \hat{X}_1 için \hat{X}_0 'a bağlı olarak özyinelemeli formül elde edilmiş oldu. Yukarıdaki formül yardımıyla filtre kazancını K_1 aşağıdaki gibi tanımlayabilir:

$$K_1 = P_x H_1^T (H_1 P_x H_1^T + R_1)^{-1} \tag{2.48}$$

(2.47) eşitliği (2.48)' deki kazancı kullanarak yazılırsa:

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_0 + K_1 (Z_1 - H_1 \hat{X}_0) \tag{2.49}$$

Ve hata ilinti matrisi

$$\begin{aligned}
P_{\hat{X}_1} &= E\left[(X - \hat{X}_1)(X - \hat{X}_1)^T \right] = P_x - P_{x\eta} P_{\eta}^{-1} P_{\eta x} \\
&= P_x - P_x H_1^T (H_1 P_x H_1^T + R_1)^{-1} H_1 P_x \\
&= P_x - K_1 H_1 P_x = (P_x^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Ayrıca kestirimci hata ilinti matrisine bağlı olarak aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_0 + P_{\hat{X}_1} H_1^T R_1^{-1} (Z_1 - H_1 \hat{X}_0) \tag{2.51}$$

Aynı sırayla \hat{X}_2 kestirimcisini \hat{X}_1 cinsinden inavasyon yardımıyla, $\eta_2 = Z_2 - H_2 \hat{X}_1$, elde edebilir. Sonuç olarak (2.43)-(2.51) benzer olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + K_2 (Z_2 - H_2 \hat{X}_1) \quad (2.52)$$

burada kazanç,

$$K_2 = P_{\hat{X}_1} H_2^T (H_2 P_{\hat{X}_1} H_2^T + R_2)^{-1} \quad (2.53)$$

ve $P_{\hat{X}_2} = (P_{\hat{X}_1}^{-1} + H_2^T R_2^{-1} H_2)^{-1}$ olur.

İlk iki adımdan sonra görüleceği üzere bu akışla, kestirimci özyineli olarak oluşturulmaktadır. Prosedürü genelleştirmek için \hat{X}_i ve $P_{\hat{X}_i}$ 'in hesaplandığı varsayalım. Sırayla önce η_{i+1} inovasyonunu hesaplanıp daha sonra $P_{X\eta_{i+1}}$ ve $P_{\eta_{i+1}}$ bulunarak \hat{X}_{i+1} ve $P_{\hat{X}_{i+1}}$ elde edilir. Filtre kazancı, kestirim ve hata ilinti matrisleri için bulunan yineleme eşitlikleri aşağıdaki elde edilir.

$$K_{i+1} = P_{\hat{X}_i} H_{i+1}^T (H_{i+1} P_{\hat{X}_i} H_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1} \quad (2.54)$$

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + K_{i+1} (Z_{i+1} - H_{i+1} \hat{X}_i) \quad (2.55)$$

$$P_{\hat{X}_{i+1}} = P_{\hat{X}_i} - K_{i+1} H_{i+1} P_{\hat{X}_i} = (P_{\hat{X}_i}^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1})^{-1} \quad (2.56)$$

Özyinelemenin başlangıç değeri $\hat{X}_0 = m_X, P_{\hat{X}_0} = P_X$ olarak alınır.

2.3.1. Kalman Filtre

Kalman filtre algoritması Rudolf E.Kalman tarafından geliştirilmiştir. Kalman, algoritmanın ilk uygulaması, Nasa tarafından üstlenilen Apollo programında yörünge kestirimi problemi üzerinde yapmıştır. Filtre ise sırasıyla Swerling (1958), Kalman (1960), Kalman ve Bucy (1961) tarafından yapılan yayınlarda geliştirilmiştir. Kalman filtre doğrusal dinamik sistemlere dayanarak Markov dizi üzerinde modellenmiştir. Eğer sistem modeli doğrusal olarak değişiyorsa ve gürültüler gaussian ise Kalman Filtre ile optimal kestirimci özyineli olarak elde edilir.

Sistem dinamik modeli: $X_{k+1} = F_k X_k + W_k$, $W_k \sim N(0, Q_k)$ ve gözlem modeli: $Z_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1} + V_{k+1}$, $V_k \sim N(0, R_k)$ olmak üzere aşağıda filter eşitliklerini elde etmeden önce, kullanılmak notasyon verilmiştir.

- Z_1, \dots, Z_k ya dayanarak yapılmış k anındaki durumun X_k kestirimi : $\hat{X}_{k|k}$
- Z_1, \dots, Z_k ya dayanarak yapılmış $k+1$ anındaki durumun X_{k+1} kestirimi: $\hat{X}_{k+1|k}$
- Kestirim hatası : $\tilde{X}_{k|k} = X_k - \hat{X}_{k|k}$ ve $\tilde{X}_{k+1|k} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}$
- Kestirim hatasının kovaryansı: $P_{k|k} = E[\tilde{X}_{k|k} \tilde{X}_{k|k}^T]$ ve $P_{k+1|k} = E[\tilde{X}_{k+1|k} \tilde{X}_{k+1|k}^T]$

Amaç k anındaki kestirim değeri $\hat{X}_{k|k}$ ve hata kovaryansını $P_{k|k}$ kullanarak $k+1$ anındaki kestirim değerlerini $\hat{X}_{k+1|k+1}$ ve hata kovaryansını $P_{k+1|k+1}$ özyineli olarak elde edecek şekilde filtre denklemlerini oluşturmaktır. Her bir k anında, kalman filtre hesaplamaları aşağıdaki gibi iki adıma bölünmüştür.

1. *Tahmin*: Durum modeli kullanılarak durum kestiriminin k anından $k+1$ anına güncellemesi yapılır.

$\hat{X}_{k|k}$ ve $P_{k|k}$ kullanılarak $\hat{X}_{k+1|k}$ ve $P_{k+1|k}$ elde edilir.

2. *Filtreleme*: $k+1$ anındaki gözlem kestirime dahil edilir.

$\hat{X}_{k+1|k}$ ve $P_{k+1|k}$ kullanılarak $\hat{X}_{k+1|k+1}$ ve $P_{k+1|k+1}$ elde edilir.

Tahmin adımı: $\hat{X}_{k|k}$ varken $\hat{X}_{k+1|k}$ için makul tahminin formu nasıl olmalıdır diye başlanırsa işe, doğrusal dinamik modele bakıp en uygun formun $\hat{X}_{k+1|k} = F_k \hat{X}_{k|k}$ olacağını iddia etmek gayet makuldür. Şimdi bu iddianın kestirim hatasına bakarak doğrulamaya çalışalım. Eğer iddiamız doğru ise $\hat{X}_{k+1|k} = F_k \hat{X}_{k|k}$ kestirimcisinin hatasının minimum olması yani diklik koşulunu sağlaması gerekir.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k+1|k} &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k} = F_k X_k + W_k - F_k \hat{X}_{k|k} = F_k (X_k - \hat{X}_{k|k}) + W_k \\ &= F_k \tilde{X}_{k|k} + W_k \end{aligned} \quad (2.57)$$

Diklik koşuluna göre; $j \leq k$ için $E \left[\tilde{X}_{k+1|k} (Z_j - m_{z_j})^T \right] = 0$

$$E \left[\tilde{X}_{k+1|k} (Z_j - m_{z_j})^T \right] = E \left[F_k \tilde{X}_{k|k} (Z_j - m_{z_j})^T \right] + E \left[W_k (Z_j - m_{z_j})^T \right] \quad (2.58)$$

İkinci terim gürültü Z_j den bağımsız olduğu için sifıra eşittir ve ilk terim $\hat{X}_{k|k}$ olduğu sürece sıfırdır. Böylece iddia doğrulanmış olur. En küçük karesel hatayı verecek kestirim

$$\hat{X}_{k+1|k} = F_k \hat{X}_{k|k} \quad (2.59)$$

Buna ait hata kovaryans hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= E \left[\hat{X}_{k+1|k} \hat{X}_{k+1|k}^T \right] = E \left[(F_k \hat{X}_{k|k} + W_k) (F_k \hat{X}_{k|k} + W_k)^T \right] \\ &= E \left[F_k \hat{X}_{k|k} \hat{X}_{k|k}^T F_k^T \right] + E \left[F_k \hat{X}_{k|k} W_k^T \right] + E \left[W_k \hat{X}_{k|k}^T F_k^T \right] + E \left[W_k W_k^T \right] \\ &= F_k P_{k|k} F_k^T + Q_k \end{aligned} \quad (2.60)$$

Filtreleme adımı: Bir önceki kısımda detaylarıyla ele alınan yenilik dizileri bu adımda kullanılmıştır. $\eta_{k+1} = Z_{k+1} - \hat{Z}_{k+1|k}$ olarak alınır, Z_{k+1} için doğrusal MMSE kestirimci $\hat{Z}_{k+1|k} = H \hat{X}_{k+1|k}$ olur. Yenilik denklemleri yeniden yazılırsa

$$\eta_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1} + V_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1|k} = H_{k+1} \tilde{X}_{k+1|k} + V_{k+1} \quad (2.61)$$

Buradan (2.55) denklemini kullanarak

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + P_{X\eta_{k+1}} P_{\eta_{k+1}}^{-1} \eta_{k+1} \quad (2.62)$$

olarak hesaplanır. Kestirimciyi hesaplayabilmek için sırasıyla $P_{\eta_{k+1}}$ ve $P_{X\eta_{k+1}}$ matrisleri bulunacaktır.

$$\begin{aligned}
P_{X\eta_{k+1}} &= E[\eta_{k+1}\eta_{k+1}^T] = E\left[\left(H_{k+1}\tilde{X}_{k+1|k} + V_{k+1}\right)\left(H_{k+1}\tilde{X}_{k+1|k} + V_{k+1}\right)^T\right] \\
&= E\left[H_{k+1}\tilde{X}_{k+1|k}\tilde{X}_{k+1|k}^T H_{k+1}^T\right] + E\left[H_{k+1}\tilde{X}_{k+1|k}V_{k+1}^T\right] \\
&\quad + E\left[V_{k+1}\tilde{X}_{k+1|k}^T H_{k+1}^T\right] + E\left[V_{k+1}V_{k+1}^T\right] \\
&= H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}
\end{aligned} \tag{2.63}$$


$$\begin{aligned}
P_{X\eta_{k+1}} &= E\left[\left(X_{k+1} - m_{X_{k+1}}\right)\eta_{k+1}^T\right] = E\left[\left(X_{k+1} - m_{X_{k+1}}\right)\left(H_{k+1}\hat{X}_{k+1} + V_{k+1}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k} + \hat{X}_{k+1|k} - m_{X_{k+1}}\right)\left(H_{k+1}\hat{X}_{k+1} + V_{k+1}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\tilde{X}_{k+1|k} + \hat{X}_{k+1|k} - m_{X_{k+1}}\right)\left(H_{k+1}\hat{X}_{k+1|k} + V_{k+1}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(\tilde{X}_{k+1|k}\tilde{X}_{k+1|k}^T H_{k+1}^T\right)\right] + E\left[\left(\hat{X}_{k+1|k} - m_{X_{k+1}}\right)\hat{X}_{k+1|k}^T H_{k+1}^T\right] \\
&\quad + E\left[\hat{X}_{k+1|k}V_{k+1}^T\right] + E\left[\left(\hat{X}_{k+1|k} - m_{X_{k+1}}\right)V_{k+1}^T\right]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Buradaki 3. ve 4. terimler, V_{k+1} gürültüsü Z_1, \dots, Z_k gözlemlere dik olduğu için, sıfırdır. 2. terimde ise $\hat{X}_{k+1|k}$ kestirimcisi, gözlemlerin Z_1, \dots, Z_k bir fonksiyonudur ve $\tilde{X}_{k+1|k}$ hata kovaryansı ile çarpımı sıfır olur. Bir önceki adımda da gösterildiği gibi optimal kestirimci $\tilde{X}_{k+1|k}$ hatası gözlemlere diktir. Böylece yukarıdaki (2.63) eşitliği

$$P_{X\eta_{k+1}} = P_{k+1|k}H_{k+1}^T \tag{2.65}$$

halini alır. Bulduklarımızı (2.62) denkleminde yerine koyarsak

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + P_{k+1|k}H_{k+1}^T \left(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}\right)^{-1} \left(Z_{k+1} - H_{k+1}\hat{X}_{k+1|k}\right) \tag{2.66}$$



Kalman Kazancı K_{k+1}

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} \left(Z_{k+1} - H_{k+1}\hat{X}_{k+1|k}\right) \tag{2.67}$$

Kestirim kovaryans matrisi ise

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - P_{X_{k+1}|Y_{k+1}} P_{\eta_{k+1}}^{-1} P_{\eta_{k+1}|X} \\
&= P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_{k+1}^T \left(H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1} \right)^{-1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T \\
&= P_{k+1|k} - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1|k}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

2.3.2. Genişletilmiş Kalman Filtre (EKF)

Bu bölümde kalman filtrenin doğrusal olmayan sistem modelleri için genişletilmesi ile elde edilmiş yaklaşık bir filtrenin, Genişletilmiş Kalman Filtrenin, çıkarımı yapılacaktır. Bunu yapmak için doğrusal olan yaklaşık bir hata sistemi bulup, bu sistem üzerinde Kalman filtresini uygulanacaktır. Çünkü EKF doğrusal olmayan sistemin doğrusal yaklaşımını kullanılarak elde edilir ve karesel hata (veya herhangi başka bir kritere göre) bakımından optimaliteyi garanti etmez. Ancak EKF, bazı doğrusal olmayan durumlarda iyi kestirimci sağlar. Bunu durumlar için EKF' in başarımı diğer filtrelerle kıyaslamalı olarak yaptığımız uygulamalarda ele alınmıştır.

Filtreyi geliştirmek için en genel haliyle doğrusal olmayan durum modelini alıp, x_k^R gösterimiyle referans geçiş değişkenleri tanımlandı. Durum ve gözlem modelleri:

$$X_{k+1} = f(X_k, k) + W_k \tag{2.69}$$

$$Z_k = h(X_k, k) + V_k \tag{2.70}$$

Bu modelde W_k ve V_k ayrık zamanlı sıfır ortalamalı ve sırasıyla Q ve R varyanslı beyaz gürültü süreçleri ve tüm j ve k değerleri için W_j, V_k ve X_0 ilintisiz. x_k^R değeri, süreç gürültüsü yokken (2.69) fark denkleminin sonucu olarak elde edildi.

$$x_{k+1}^R = f(x_k^R, k) \tag{2.71}$$

Fark denkleminin başlangıç durumu x_0^R . X_k ile x_k^R arasındaki hata $\delta_k = X_k - x_k^R$ gösterildi. Daha sonra bu hatanın dinamiklerini tarif edecek şekilde bir yaklaşık doğrusal model oluşturulmaya çalışıldı. Hatanın bir zaman adımı sonraki hali:

$$\delta_{k+1} = X_{k+1} - x_{k+1}^R = f(X_k, k) + W_k - f(x_k^R, k) \tag{2.72}$$

EKF'de bu eşitliğin doğrusal yaklaşımını bulmak için Taylor serisi açılımından yararlanılır. $f(X_k, k)$ fonksiyonunun x_k^R değeri etrafında birinci dereceden seri açılımı:

$$f(X_k, k) \approx f(x_k^R, k) + \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{X=x_k^R} (X_k - x_k^R) \quad (2.73)$$

Burada $F_k = \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{X=x_k^R}$ şeklinde tanımlanırsa; $n \times n$ boyutlu F_k matrisinin formu

aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$F_k = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(X, k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(X, k)}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n(X, k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(X, k)}{\partial x_n} \end{array} \right]_{X=x_k^R} \quad (2.74)$$

Bu tanımlamayla,

$$\delta_{k+1} \approx f(x_k^R, k) + F_k (X_k - x_k^R) + W_k - f(x_k^R, k) = F_k (X_k - x_k^R) + W_k \quad (2.75)$$

Görüldüğü gibi bu denklem doğrusaldır. Böylelikle durum modeli ilişkili doğrusal yaklaşık bir model oluşturulmuş oldu. Aynı şekilde doğrusal olmayan gözlem modelinin de yaklaşık doğrusalını oluşturmak için, $h(X_k, k)$ gözlem fonksiyonuna Taylor açılımı uygulanır.

$$h(X_k, k) \approx h(x_k^R, k) + \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{X=x_k^R} (X_k - x_k^R) \quad (2.76)$$

H_k , $H_k = \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{X=x_k^R}$ olmak üzere,

$$Z_k \approx h(x_k^R, k) + H_k (X_k - x_k^R) + V_k \quad (2.77)$$

Daha yalın bir form için

$$\begin{aligned}
v_k &= Z_k - h(x_k^R, k) = h(X_k, k) + V_k - h(x_k^R, k) \\
&\approx H_k (X_k - x_k^R) + V_k = H_k \delta_k + V_k
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Böylelikle gözlemler kullanılarak tanımlanan v_k ile δ_k arasında, doğrusal bir ilişki elde edildi. δ_k 'in (2.75) ve (2.78) denklemlerini sağladığı kabulüyle, bu doğrusal eşitlikler üzerine Kalman filtreyi uygulayabilir ve $\hat{\delta}_{k+1|k}$, $P_{k+1|k}$, $\hat{\delta}_{k+1|k}$ ve $P_{k+1|k+1}$ değerlerini hesaplayabilir. Yalnız burada X_k ile x_k^R arasındaki gerçek hata (2.75) ve (2.78) denklemlerini sağlamamaktadır. Dolayısıyla $\hat{\delta}_{k+1|k+1}$ ve $\hat{\delta}_{k+1|k}$ kestirimcileri gerçek hatanın optimal kestirimcileri olmayacaktır. $\hat{\delta}_{k+1|k+1}$ ve $\hat{\delta}_{k+1|k}$, X_k ile x_k^R arasındaki hata olduğu için X_{k+1} değeri için makul kestirimciyi aşağıdaki gibi yazabilir.

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1|k} &= x_{k+1}^R + \hat{\delta}_{k+1|k} \\
\hat{X}_{k+1|k+1} &= x_{k+1}^R + \hat{\delta}_{k+1|k+1}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Özyineli denklemleri oluşturmak için x_0^R için başlangıç koşulunu, yansız olarak başlangıç durumunun başlangıç değeri m_{X_0} olarak alındı. Bu ilk değeri kullanarak,

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{0|0} &= E[\delta_0] = E[X_0 - x_0^R] = 0 \\
P_{0|0} &= P_{X_0}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Dolayısıyla, $\hat{\delta}_{1|0} = F_0 \hat{\delta}_{0|0} = 0$ olur. $\hat{\delta}_{1|0}$ ya ait hata kovaryansı $P_{1|0} = F_0 P_{0|0} F_0^T + Q$ şeklinde olacaktır. Bunları kullanarak X_1 in kestirimi; $\hat{X}_{1|0} = x_1^R + \hat{\delta}_{1|0} = f(m_{X_0}, 0)$ olarak bulunur ve bu kestirimin hata kovaryansı da yaklaşık olarak $P_{1|0}$ a eşittir.

$$\begin{aligned}
P_{1|0} &= E\left[(\delta_1 - \hat{\delta}_{1|0})(\delta_1 - \hat{\delta}_{1|0})^T \right] \\
&\approx E\left[(X_1 - x_1^R - (\hat{X}_{1|0} - x_1^R))(X_1 - x_1^R - (\hat{X}_{1|0} - x_1^R))^T \right] \\
&= E\left[(X_1 - \hat{X}_{1|0})(X_1 - \hat{X}_{1|0})^T \right]
\end{aligned} \tag{2.81}$$

k=1 anında gelen gözlemle, Z_1 , filter kazancı $K_1 = P_{1|0}H_1^T (H_1P_{1|0}H_1^T + R)^{-1}$ şeklinde yazılır.

$$\hat{\delta}_{1|1} = \hat{\delta}_{1|0} + K_1(v_1 - H_1\hat{\delta}_{1|0}) = K_1v_1 \quad (2.82)$$

$\hat{\delta}_{1|0} = 0$ sonucuna dayanarak $P_{1|1} = (I - K_1H_1)P_{1|0}$ olur. Böylece k=1 anındaki durum kestirimcisi:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{1|1} &= x_1^R + \hat{\delta}_{1|1} = x_1^R + K_1v_1 = \hat{X}_{1|0} + K_1[Z_1 - h(x_1^R, 1)] \\ &= \hat{X}_{1|0} + K_1[Z_1 - h(\hat{X}_{1|0}, 1)] \end{aligned} \quad (2.83)$$

şeklinde yazılır. (2.81) denklemine benzer şekilde hesaplırsak, $\hat{X}_{1|1}$ in hata kovaryansı yaklaşık olarak $P_{1|1}$ e eşit olur. k=1 anındaki ile aynı referans değişkenleri kullanılarak k=2 anındaki kestirimci de aynı sırayla hesaplanabilir. Fakat bunun için, bulunan $\hat{X}_{1|1}$ kestirimini kullanmak daha akılcıdır. Bu yeni değişkenle yeni hata aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\delta_1^* = X_1 - \hat{X}_{1|1} \quad (2.84)$$

δ_1^* in sıfır ortalamalı olduğunu kabul ederek, δ_1^* ' in kestirimi $\hat{\delta}_{1|1}^* = 0$ olacaktır ve $\hat{\delta}_{2|1} = F_1\hat{\delta}_{1|1}^* = 0$ olur. Bu kabul aslında sadece sistem modeli doğrusal ise geçerlidir, değilse yaklaşık olarak doğrudur ve δ_1^* in ortalaması yaklaşık sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\hat{X}_{2|1} = x_2^R + \hat{\delta}_{2|1} = f(\hat{X}_{1|1}, 1) \quad (2.85)$$

Bu kestirimci için yaklaşık hata kovaryans matrisi $P_{2|1} = F_1P_{1|1}F_1^T + Q$ şeklindedir.

Z_1 gözlemini kullanarak izlenen yolu, k=2 anındaki Z_2 için izlenirse, tahmin ve filtreleme adımlarının aynı örüntüye sahip olduğu görülecektir. Sonuç olarak EKF eşitlikleri aşağıdaki gibi özetleyebilir:

Tahmin adımı:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1|k} &= f(\hat{X}_{k|k}, k) \\
P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + Q \\
F_k &= \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{X}_{k|k}}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Filtre güncellemesi:

$$\begin{aligned}
H_{k+1} &= \left. \frac{\partial h(x, t_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{X}_{k+1|k}} \\
K_{k+1} &= P_{k+1|k} H_{k+1}^T \left(H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R \right)^{-1} \\
\hat{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} \left[Z_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1|k}, k+1) \right] \\
P_{k+1|k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Burada standart Kalman filtredeki yenilikler ile filtre güncelleme adımındaki $\hat{X}_{k+1|k+1}$ için $Z_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1|k}, k+1)$ teriminin oynadığı rol aynıdır. Bu kalan terim filtrenin doğru işleyişini sağlamak için izlenebilir. Önce alınacak gözlemin de kestirim tahminine bağlı olarak tahmini yapılır, daha sonra yeni gelen gözlemle aralarındaki fark hesaplanarak toplam kestirim iyileştirilmeye çalışılır.

2.3.3. UKF

Doğrusal olmayan modellerin doğrusal yaklaşımını oluşturarak durum kestirimi yapan EKF'ye alternatif olarak, doğrusal olmayan modellerde durum kestirimi için önerilmiş[], fakat Gauss dağılım sınırı olmayan Unscented Kalman Filtre, Unscented Dönüşüm yöntemine dayanmaktadır. Unscented adlandırması ile filtrenin çok iyi tarif edilemediği düşüncesiyle, unscented dönüşümün kullandığı parçacıkların adı kullanılarak filtre Sigma Nokta Kalman Filtre (SPKF) olarak da adlandırılmıştır. Burada ileride ele alınacak parçacık filtrelerindeki rasgele örneklemenin aksine, parçacık ve ağırlıklar deterministik olarak seçilir ve dolayısıyla rasgele örneklemeyle kıyasla, gereken örnek sayısı daha azdır. UKF ile oluşturulan doğrusal kestirimci, doğrusal

model için Kalman filtre ile eşdeğer performans sergiler ve EKF'deki gibi herhangi bir doğrusallaştırma adımına gerek duymaz.

UKF ve UPF'in (Unscented Parçacık Filtre) temel aldığı sigma nokta dönüşümü ile [Julier and Uhlmann] rasgele değişkenin doğrusal olmayan bir yayılımdan sonraki istatistiksel özellikleri bulunur. n_x boyutlu x rasgele değişkenine uygulanan $y = g(x)$ gibi doğrusal olmayan bir dönüşüm için Sigma noktaları şöyle seçilir:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= m_x \\ \chi_{i(+n_x)} &= m_x \pm \left(\sqrt{(n_x + \lambda) P_x} \right)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_x\end{aligned}\quad (2.88)$$

ve ortalama ve kovaryans bileşenleri için ağırlıklar,

$$\begin{aligned}w_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{n_x + \lambda}, \quad w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ w_i^{(m)} &= w_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_x\end{aligned}\quad (2.89)$$

şeklinde. Bu noktalar ve ağırlıklar cinsinden rasgele değişkenin ortalaması ve kovaryansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m_x = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i \chi_i, \quad P_x = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (\chi_i - m_x)(\chi_i - m_x)^T \quad (2.90)$$

$\chi_0, w_0, \dots, \chi_{2n_x}, w_{2n_x}$ $2n_x + 1$ tane sigma noktası ve ağırlıkları seçildikten sonra $Y_i = g(\chi_i)$ şeklinde bu noktalar yayılır. Buradan için ortalama ve kovaryans değerleri:

$$m_y = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} Y_i, \quad P_y = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (Y_i - m_y)(Y_i - m_y)^T \quad (2.91)$$

formülleri ile hesaplanır.

UKF filtre ise, bu yaklaşımla durum x_k ve gözlemlerin z_k istatistiklerini yaklaşıklar ve daha sonra \hat{x}_k 'i hesaplamak için doğrusal kestirimci oluşturur. ($\hat{x}_k = m_{x_k} + P_{x_k z_k} P_{z_k}^{-1} (z_k - m_{z_k})$) (mmse)

Denklem (2.1)-(2.4)'deki doğrusal olmayan sistem modelinde sigma nokta dönüşümünü uygulayabilmek için durum aşağıdaki gibi genişletilir.

$$x_{k-1}^a = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ w_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Bu durumda

$$y_k = \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{k-1}, w_{k-1}) \\ h(f(x_{k-1}, w_{k-1}), v_k) \end{bmatrix} = g(x_{k-1}^a) \quad (2.93)$$

Daha sonra $\hat{x}_{k|k}$ hakkında gerekli bilgiyi sağlayacak m_y ve P_y değerleri hesaplanır.

Sigma noktaları:

$$\begin{aligned} \chi_0^a &= m_{k-1|k-1}^a \\ \chi_i^a &= m_{k-1|k-1}^a + \left(\sqrt{(2n+p+\lambda) P_{k-1|k-1}^a} \right)_i \\ \chi_{i+n_a}^a &= m_{k-1|k-1}^a - \left(\sqrt{(2n+p+\lambda) P_{k-1|k-1}^a} \right)_i \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ağırlıklar (2.89) denklemindeki gibidir. $Y_i = g(\chi^a)$ dönüşümü ile $m_y = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ m_{z_k|k-1} \end{bmatrix}$ ve

$P_y = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & P_{x_k z_k|k-1} \\ P_{x_k z_k|k-1} & P_{z_k|k-2} \end{bmatrix}$ hesaplanır. Buradaki tüm kovaryans değerleri k-1 anına kadar

olan gözlemlere, $z_{1:k-1}$, koşulludur.

Bu prensibe göre çalışan filtrenin algoritması aşağıdaki şekilde verilmiştir.

 ALGORTİMA 1: UKF

Başlangıç durumu: $\hat{x}_{0|0} = m_0, P_{0|0} = P_0$

- FOR $k = 1 : son_an$

Tahmin Adımı:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{i,k|k-1}^* &= f(\mathcal{X}_i^*, \mathcal{X}_i^w) \\ \hat{x}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1}^* \\ P_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1})(\mathcal{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1})^T\end{aligned}$$

Filtreleme Adımı:

$$\begin{aligned}Z_i &= h(\mathcal{X}_{i,k|k-1}^*, \mathcal{X}_i^v) \\ m_{z_{k|k-1}} &= \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(m)} Z_i \\ P_{z_{k|k-1}} &= \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (Z_i - m_{z_{k|k-1}})(Z_i - m_{z_{k|k-1}})^T \\ P_{x_k z_{k|k-1}} &= \sum_{i=0}^{2n_a} w_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1})(Z_i - m_{z_{k|k-1}})^T \\ K_k &= P_{x_k z_{k|k-1}} P_{z_{k|k-1}}^{-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K(z_k - m_{z_{k|k-1}}) \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k P_{z_{k|k-1}} K_k^T\end{aligned}$$

- END FOR
-

Şekil 2.3: UKF Algoritması

Eğer tezde yapılan uygulamasında olduğu gibi, gözlem gürültüsü toplamsal ise genişletilmiş durum vektöründen v_k çıkarılarak hesaplama yapılır. Böylece genişletilmiş durum değişkeninin boyutu düşmüş olur.

2.4. NÜMERİK BAYESÇİ YÖNTEMLER

Önceki bölümde de belirtildiği gibi asıl bayesçi kestirimdeki asıl hedef bilinmeyen sürece dair sonsal dağılımı oluşturmaktır. Daha sonra bu dağılım üzerinden noktasal kestirimler yaparak ilgilenilen değerlerin kestirimlerini elde etmek mümkün olacaktır. Fakat bu sonuca ulaşmak her zaman çok kolay olmaz. Bu bölümde karşılaşılan zorlukların matematiksel olarak gösterildikten sonra, bu çalışmada kullanılacak çözüm metotları anlatılmıştır.

Markov süreç olarak modellenen sürecin değişkenlerini $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}, x_k \in \mathcal{X}$ şeklinde gösterilsin. Bu sürece ait başlangıç dağılımı $p(x_0)$ ve durum geçiş eşitliği $p(x_k | x_{k-1})$ olsun (bölüm boyunca basitliğin sağlanması adına süreçler Markovian olarak kabul edildi). Ayrıca gözlemlerin $\{z_k; k \in \mathbb{N}^*\}, z_k \in \mathcal{Z}$; bilinmeyen $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ sürecin ve marjinal $p(z_k | x_k)$ dağılımının verildiği durumda, birbirinden koşullu olarak bağımsız olduğu kabul edildi.

$$\begin{aligned} & p(x_0) \\ & p(x_k | x_{k-1}) \quad \text{for } k \geq 1 \\ & p(y_k | x_k) \quad \text{for } k \geq 1 \end{aligned}$$

Durumu ve gözlemler, önceki bölümdeki gibi, k anına kadar sırasıyla, $x_{0:k} \triangleq \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ve $z_{1:k} \triangleq \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ olarak gösterildi. Bir bayesçi olarak amacımız x_0, x_1, \dots, x_k hakkındaki tüm bilgiyi içeren sonsal dağılımı $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ veya onun bir marjinali olan $p(x_k | z_{1:k})$ filtreleme dağılımını zamanda yinelemeli olarak oluşturmak. Daha sonra ise bu dağılımı kullanarak kimi beklene değerleri, dağılımın modu veya değişkenin ortalaması gibi, kestirmektir. Sonsal dağılım üzerinden bulunabilecek beklenen değerler, ilgilenilen bir $f_k : \mathcal{X}^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{f_k}}$ fonksiyonu üzerinden, aşağıdaki gibi genel bir formda yazabilir:

$$I(f_k) = E_{p(x_{0:k} | z_{1:k})} [f_k(x_{0:k})] \triangleq \int f_k(x_{0:k}) p(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_{0:k} \quad (2.95)$$

Bu genel gösterimde $f_k(x_{0:k}) = x_{0:k}$ olduğunda, ulaşılabilecek değer dağılımının ortalaması yani bilinmeyen değişkenin beklenen değeri olacaktır. Herhangi bir k anında sonsal dağılım, Bayes' teorimi kullanılarak,

$$p(x_{0:k} | z_{1:k}) = \frac{p(z_{1:k} | x_{0:k}) p(x_{0:k})}{\int p(z_{1:k} | x_{0:k}) p(x_{0:k}) dx_{0:k}} \quad (2.96)$$

Bu sonsal dağılım $p(x_{0:k} | y_{1:k})$ için, daha önceki bölümde çıkarımı gösterildiği gibi, kolayca yinelemeli bir formül oluşturulabilir:

$$p(x_{0:k+1} | z_{1:k+1}) = p(x_{0:k} | z_{1:k}) \frac{p(z_{k+1} | x_{k+1}) p(x_{k+1} | x_k)}{p(z_{k+1} | z_{1:k})} \quad (2.97)$$

Genellikle uygulamalarda on-line kestirimler yapıldığı için, x 'in tüm değerleri ile değil de sadece o anki ve bir zaman adımı sonra alacağı değer ile ilgilenildiğinden, sonsal dağılımın marjinali alınır $p(x_t | y_{1:t})$ veya yukarıdaki yinelemeler marjinal dağılım için de geçerli olduğundan buradan direk olarak marginal sonsal dağılım hesaplanır. Daha önceki bölümde de belirtildiği gibi bu dağılımın hesaplanması, yaygın kullanımla, iki adımda gerçekleştirilir. Tahmin adımında durum modelinden yararlanılarak bir sonraki durum için optimal kestirimci önerilir. Filtreleme (güncelleme) adımında ise gözlemler alınarak olabilirlik fonksiyonu ile bu tahminler geliştirilir.

- Tahmin adımı : $p(x_k | z_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}) dx_{k-1}$
- Güncelleme adımı: $p(x_k | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{\int p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1}) dx_k}$

Yukarıdaki gibi yineleme denklemlerinin basitçe elde edilmesinden kolayca x 'in kestirimine ulaşılabileceği izleniminin oluşması yanıltıcı bir durumdur. Zira Bayes' formulündeki paydadaki normalizasyon sabiti $p(z_{1:k})$ ' in hesabı ve $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ sonsal dağılım üzerinden bulunacak marjinal dağılımların, $p(x_k | y_k)$ gibi, veya beklenen değerlerin, $I(f_k)$, hesaplanması yüksek-boyutlu integraller içerdikleri için hiç kolay olmaz. Doğrusal gaussian durum modellerini (kalman filtre) ve saklı sonlu-durum uzay Markov dizilerini (HMC) içeren birkaç durum hariç, bu dağılımın analitik olarak hesaplanması mümkün değildir. Daha önceki bölümde gösterildiği gibi, durum ve

gözlem modelleri lineer ise ve belirsizlikler Gauss olarak modellenbiliyorsa güncelleme ve tahmin adımlarında karşılamak denklemler Gauss-Gauss güncellemesiyle kolayca elde edilebilmekteydi. Fakat gerçek hayatta karşımıza çıkan birçok uygulamada modeller bu kadar basit olmayacaktır ve ayrıca bilinmeyen parametreler çok yüksek boyutlara sahip olabilir. Bu durumda optimal kapalı çözümler analitik olarak elde edilemeyeceği için, kimi yaklaşıkların oluşturulabilmesi gerekir. Bu amaçla 1960'lı yılların ortalarından beri konu üzerine birçok çalışma yapılmış ve değişik çözümler önerilmiştir. Bunlardan bazılarını (EKF, grid tabanlı filtreler, Gauss toplam filtresi) daha önceki bölümde ele alınmıştı. Bunlar genel olarak analitik yaklaşıklama temeline dayanmaktaydı. Fakat bir çok uygulamada bu doğrusallaştırma ve gauss yaklaşıklama yöntemleri düşük performansla neden olabilmektedir. Bunlardan farklı olarak çözüme dair bir diğer bakış açısının doğuşu ise 60lı 70li yılların arasına rastlar (Handschin ve Mayne 1969). Burada asıl işi zorlaştıran sürece, yani hesaplanması zor integrallerin nasıl alınabileceği üzerine yoğunlaşmıştır. O zamandan bu yana çözüm olarak, deterministik kafes-tabanlı integrasyon ve stokastik integrasyon metotları olmak üzere genel olarak iki başlık altında toplayabileceğimiz, nümerik yöntemler önerilmiştir. Biz bu tezde problemimizin doğasına uygun olduğu için ve yüksek boyutlu değişkenlerde daha iyi sonuçlar verdiği için stokastik metotları kullandık. Bu stokastik yöntemler, içerdikleri işlem yükü nedeniyle 80li yıllara kadar uygulamalarda kullanılması mümkün olmamıştır. 80lerin sonuna doğru ise bilgisayarların hesap gücündeki ciddi artış, SMC metotları olarak adlandırılan nümerik integrasyon metotlarının yeniden doğup gelişimine neden olmuş ve buna bağlı olarak da kullanıldığı uygulamalar hızla artmıştır.

Bizim ele aldığımız hedef problemi de yukarıda bahsetmiş olduğumuz genel sorunu içerir. Durum model doğrusal olarak değişse bile, gözlemlerimiz genelde durumun doğrusal olmayan bir fonksiyonudur (erim ve açığı gibi). Bu yüzden hedef kinematiklerinin kestirimi her zaman optimal olarak gerçekleştirilemez. Bir diğer motivasyon ise, tahmin edileceği üzere modeldeki gürültülerin ve belirsizliklerin de her zaman gauss dağılıma sahip olmamasıdır. İşte bu bölümde analitik çözüme ulaşamayan durum için önerilmiş nümerik bayesçi yöntemler ele alınacaktır. Nümerik yöntemlerin detaylarına geçmeden önce kısım 2.4.1 de bu yöntemlerin dayandığı esas olan Monte Carlo tekniği kısaca ele alınmıştır. Daha sonra sırasıyla tezde kullanılan nümerik yöntemler anlatılmıştır.

2.4.1. Monte Carlo Metodu

Metodun özündeki prensib oldukça basittir. Farzedelim ki integral formunda verilmiş bir büyüklüğü hesaplanması gerekiyor. Monte Carlo yaklaşımı bu büyüklüğü rasgele bir sürecin ortalaması (başka bir moment veya istatistik de olabilir) olarak spesifik eder. Basit bir örnekle ile tekniği ele alalım ve sıfır ortalamalı, olasılık yoğunluk fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabileceğimiz Gauss bir sürecin varyansının kestirimi problemine bakalım.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.100)$$

Bilindiği gibi varyans dağılımın ikinci momentidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (2.101)$$

Başka bir deyişle varyansın hesaplanabilmesi için, her x^2 değerini $p(x)$ dağılımı ile ağırlıklandırılmalıdır. İntegralden kurtularak varyansın kestirimini öneren Monte Carlo yaklaşımı şöyle özetlenebilir:

1. Gauss dağılımdan N tane rasgele değişken simüle et

$$x_i \leftarrow N(0, \sigma^2)$$

2. Sonra bunların ortalamasını hesapla.

$$v \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Bu metodun daha kompleks problemler için genelleştirilmesi ise hiç zor değildir. Mesela aşağıdaki integral ele alınsın:

$$I = \int_x f(x) dx \quad (2.102)$$

(2.102) aşağıdaki şekilde de yazabilir;

$$I = \int_x \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx \quad (2.103)$$

Burada $g(x)$ fonksiyonu normalizedir: $\int_x g(x)dx = 1$ yani uygun bir olasılık dağılımıdır.

Örnek verilen basit örneği klavuz olarak kullanılarak (2.102)'deki daha genel integrali aynı metodoloji ile şöyle hesaplanabilir:

1. $g(x)$ dağılımından N adet rasgele değişken simüle et

$$x_i \leftarrow g(x)$$

2. Ortalamasını al

$$I = E_g \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

Bu teknik “önem örnekleme” olarak da adlandırılır. Çünkü $f(x)$, $g(x)$ kullanarak uniform olmayan bir şekilde örneklenmiştir yani $f(x)$ bazı değerlerine daha fazla “önem” verilerek örneklenmiştir. (3)deki kestirimin varyansı, örnekleme dağılımı $g(x)$ 'e bağlıdır. Varyansın açık halini yazılırsa:

$$\text{var} \left[E \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right] = \int_x \left(\frac{f(x)}{g(x)} - I \right)^2 g(x) dx \quad (2.104)$$

Buradan göreceğimiz gibi eğer:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\int_x f(x) dx} \quad (2.105)$$

ise yani örneklerimiz direk integrallenen fonksiyondan alınırsa kestirimin varyansı sıfır olacaktır.

Görüldüğü gibi Monte Carlo metodu gereğince, nümerik olarak hesaplanması zor olan integralleri hesaplamak ve sonsal dağılımı analitik olarak hesaplamak zorunda değiliz, yeter ki bu dağılımdan örnekler alabilelim. Sonra bu örneklerle dağılımımızın yaklaşımını oluşturabilir veya hiç dağılımı oluşturmadan direk nokta kestirime ulaşabiliriz. Tabii ki böyle olunca kestirim, doğrusallık ve Gauss dağılımlılık kısıtlamasına gerek kalmadan, herhangi bir model üzerinden yapılabilir. Burada önemli olan, verilen bir dağılımdan örnek almak veya herhangi bir dağılıma göre rasgele değişken üretebilmektir. Rasgele sayı üretimi ile ilgili tüm tekniklere ele alınan problem itibarıyla yer verilememiştir.

2.4.2. Kusursuz Monte Carlo Örnekleme

$p(x_{0,k} | z_{1,k})$ dağılımından örnekleyerek elde edilmiş N adet bağımsız ve özdeş olarak dağılmış (i.i.d) rasgele örnek/parçacık $\{x_{0,k}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ 'ğin var olduğu kabul edilsin. Bu durumda dağılımın gözlemsel kestirimi şöyle yazılabilir:

$$P_N(dx_{0,k} | z_{0,k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_{0,k}^{(i)}}(dx_{0,k}) \quad (2.106)$$

Bu gösterimde $\delta_{x_{0,k}^{(i)}}(dx_{0,k})$ $x_{0,k}^{(i)}$ parçacıkları üzerine yerleştirilmiş delta-dirac ağırlıklarıdır. Buradan $I(f_k)$ nokta kestirimi doğrudan yapılabilir.

$$I_N(f_k) = \int f_k(x_{0,k}) P_N(dx_{0,k} | z_{1,k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_k(x_{0,k}^{(i)}) \quad (2.107)$$

Bu kestirim yansızdır ve $f_k(x_{0,k})$ nin sonsal varyansı aşağıdaki kuralı sağlarsa,

$$\sigma_{f_k}^2 \equiv E_{p(x_{0,k} | z_{1,k})} [f_k^2(x_{0,k})] - I^2(f_k) < +\infty \quad (2.108)$$

$(I_N(f_k))$ nin varyansı $\text{var}(I_N(f_k)) = \frac{\sigma_{f_k}^2}{N}$) büyük sayıların gücü kanunu gereği; $N \rightarrow \infty$ giderken asimptik olarak $I_N(f_k) \xrightarrow{a.s.} I(f_k)$ şeklinde yakınsayacaktır. Ayrıca $\sigma_{f_k}^2 < \infty$ olduğu sürece merkezi limit teoremi gereğince $\sqrt{N} [I_N(f_k) - I(f_k)] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} N(0, \sigma_{f_k}^2)$ dağılımına yakınsar. Buradan da görüldüğü gibi Monte Carlo metodunun avantajı açıktır. $\{x_{0,k}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ örnekleri kullanarak $I(f_k)$ nin kestirimini kolayca bulunabilir ve yine gösterildiği gibi yakınsamanın hızı integrantın boyutundan bağımsızdır. Oysa ki herhangi bir deterministik nümerik integrasyon metodunda yakınsama hızı integrandın boyutu arttıkça düşer (Doucet, 2001).

Fakat her zaman sonsal dağılımdan $p(x_{0,k} | z_{1,k})$; eğer dağılım çok-değişkenliyse, standart değilse ve tamamı elde edilemiyorsa, herhangi bir t anında efektif bir şekilde

örnek almak mümkün olmayabilir. Uygulamalı istatistikte böyle durumlarda Markov dizisi Monte Carlo Metotları (MCMC) kullanılarak kompleks olasılık dağılımların örneklenmesi yaygın olarak kullanılır (Gilks, Richardson ve Spiegelhalter 1996, Robert ve Casella 1999). Fakat, MCMC metotları iteratif algoritmalar olduğu için, tezde ele aldığımız özyineli kestirim problemlerde kullanılması çok pratik değildir.

2.4.3. Önem Örnekleme

Bu yöntem yukarıda bahsedilen probleme alternatif olarak önerilmiştir. Buradaki temel fikir sonsal dağılımdan örnek alınamıyorsa, örnekleme daha kolay bir dağılımdan örnekler alınıp çeşitli ağırlıklarla ağırlandırıldıktan sonra elde etmek istenilen dağılıma yaklaştırmaktır. Örnek alınan önem örnekleme dağılımı $\pi(x_{0:k} | z_{1:k})$ olsun. Yine farzedelim ki $I(f_k)$ gibi bir çıkarım yapılmak isteniyor.

$$I(f_k) = \frac{\int f_k(x_{0:k}) w(x_{0:k}) \pi(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_{0:k}}{\int w(x_{0:k}) \pi(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_{0:k}} \quad (2.109)$$

Burada $w(x_{0:k})$ önem ağırlığı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibidir.

$$w(x_{0:k}) = \frac{p(x_{0:k} | z_{1:k})}{\pi(x_{0:k} | z_{1:k})} \quad (2.110)$$

Dolayısıyla $\pi(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımından N i.i.d parçacık $\{x_{0:k}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ örneklenebilirse; $I(f_k)$ ' in Monte Carlo kestirimi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{I}_N(f_k) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_k(x_{0:k}^{(i)}) w(x_{0:k}^{(i)})}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w(x_{0:k}^{(j)})} = \sum_{i=1}^N f_k(x_{0:k}^{(i)}) \tilde{w}_k^{(i)} \quad (2.111)$$

Buradaki $\tilde{w}_k^{(i)}$ ler normalize önem ağırlıklarıdır ve aşağıdaki gibi verilir.

$$\tilde{w}_k^{(i)} = \frac{w(x_{0:k}^{(i)})}{\sum_{j=1}^N w(x_{0:k}^{(j)})} \quad (2.112)$$

Örnek sayısı N sonlu bir değerse, $\hat{I}_N(f_k)$ kestirimi de yanlı olacaktır. Fakat büyük sayıların gücü yasası gereğince $N \rightarrow +\infty$ iken $\hat{I}_N(f_k) \xrightarrow{a.s.} I(f_k)$ olur. Bazı ek kabullerle merkezi limit teorimi uygulanırsa yakınsama hızı yine integrandın boyutundan bağımsız hale gelir (Geweke 1989). Tabi ki bu parçacıklar direk sonsal dağılımı oluşturmak için de kullanılabilir:

$$\hat{P}_N(dx_{0:k} | z_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(dx_{0:k}) \quad (2.113)$$

Önem örnekleme genel bir Monte Carlo iterasyon metodudur. Fakat basit yapısına rağmen özyineli kestirim için uygun değildir. Çünkü $p(x_k | z_{1:k})$ nin kestimini yapmadan önce tüm datanın, $z_{1:k}$ 'nin, elimizde olması ve işlenmesi gereklidir. Genel olarak, özyineli kestirim; her zaman anı için yeni gözlem, z_{k+1} , geldiğinde, yeniden önem ağırlıklarının hesaplanabilmesini gerektirir.

2.4.4. Sıralı Önem Örnekleme

Bu yöntemle önem örnekleme yöntemi değiştirilerek özyinelemeli kestirim problemleri için kullanılabilir bir hale getirilmiştir. Getirdiği kolaylık; geçmişte simüle edilmiş $\{x_{0:k-1}^{(i)}; i=1, \dots, N\}$ parçacıkların değiştirilmesine gerek kalmadan sonsal dağılımın kestirimini $\hat{P}_N(dx_{0:k} | z_{1:k})$ yapılabilmesidir. Bu demek oluyor ki $k-1$ anındaki önem fonksiyonunu $\pi(x_{0:k-1} | z_{0:k-1})$, k anındaki önem fonksiyonunun $\pi(x_{0:k} | z_{0:k})$ marjinal fonksiyonu olarak yazılırsa :

$$\pi(x_{0:k} | z_{1:k}) = \pi(x_{0:k-1} | z_{0:k-1}) \pi(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) = \pi(x_0) \prod_{t=1}^k \pi(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t}) \quad (2.114)$$

Buradan kolaylıkla görülebileceği gibi bu önem fonksiyonu, önem ağırlıklarının da özyineli bir şekilde elde edilmesine imkan verir. Gerçekten,

$$\tilde{w}_k^{(i)} \propto \tilde{w}_{k-1}^{(i)} \frac{p(z_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{\pi(x_k^{(i)} | x_{0:k-1}^{(i)}, z_{1:k})} \quad (2.115)$$

olur. Genelde tezdeki parçacık filtresi uygulamalarında önsel dağılım önem dağılımı olarak alındı.

$$\pi(x_{0:k} | z_{1:k}) = p(x_{0:k}) = p(x_0) \prod_{t=1}^k p(x_t | x_{t-1}) \quad (2.116)$$

Bu durumda önem ağırlıkları (2.117) denklemindeki gibi olur.

$$\tilde{w}_k^{(i)} \propto \tilde{w}_{k-1}^{(i)} p(z_k | x_k^{(i)}) \quad (2.117)$$

Sıralı önem örnekleme (SIS) özyinelemeli kestirim probleminde kullanılabilmesinden dolayı çekici bir yöntemdir ve yaygın olarak kullanılır fakat en nihayetinde yöntem, önem örneklemesinin sınırlandırılmış bir versiyonudur. Maalesef ki bilindiği gibi (Gilks 1996, Robert ve Casella 1999), önem örneklemesinin yöntemleri çok-boyutlu uzaylarda sonuçları iyi değildir.

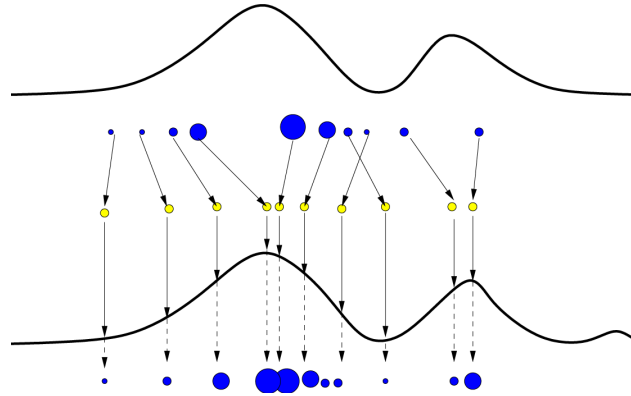
Sıralı önem örnekleme metodunda karşılaşılan problem, k arttıkça $\tilde{w}_k^{(i)}$ önem ağırlıklarının sıfıra yaklaşmasıdır. Pratikte birkaç adımdan sonra, çok az sayıdaki önem ağırlığının değeri sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısıyla algoritmanın doğru bir şekilde sonsal dağılımı üretmesi mümkün olmayacaktır. Bu dejenerasyonu önlemek için “yeniden örnekleme” adı verilen bir adım filtre akışına dahil edilmiştir. Bu adımda, ağırlıkları $\tilde{w}_t^{(i)}$ düşük olan parçacıkları elemek ve yüksek olanları çoğaltılmaktır (Gordon ve ekibi. 1993).

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 STANDART PARÇACIK FİLTRESİ

3.1.1. SIS Algoritması

Sıralı önem örnekleme algoritması bir Monte Carlo (MC) metodudur ve geçtiğimiz on yıldan beri geliştirilen sıralı Monte Carlo filtreleri için temel oluşturur (Doucet ve diğ., 2001). Sıralı Monte Carlo (SMC) yaklaşımı ile oluşturulan filtreler literatüre; bootstrap filtre (Gordon ve diğ., 1993), yoğunlaşma algoritması (MacCormick ve Blake, 1999), parçacık filtresi (Arulampalam ve diğ., 2002) ve birbiriyle etkileşimli parçacık yaklaşırma (Del Moral, 1996) gibi birçok değişik isimle geçmiştir. Sıralı Önem Örnekleme (SIS) ise özyineli bayesçi filtreyi, monte carlo simülasyonları ile gerçekleştirmek için kullanılan bir tekniktir. Buradaki ana fikir, gerekli sonsal dağılımı bir takım rasgele parçacık ve bunlarla ilişkili ağırlıkları kullanarak ifade edebilmektir. Parçacıkların sayısı arttıkça, Monte Carlo karakterizasyonu gerçek sonsal dağılımın alışımlı fonksiyonel tanımlamasına eşdeğer hale gelecek ve SIS filtre optimal bayesçi kestirime yaklaşacaktır.



Şekil3.1: Önem Örnekleme

Algoritmanın detaylarını geliştirmek amacı ile, $\{x_{0:k}^j, w_k^j\}_{j=1}^{N_s}$ büyüklükleri, sonsal pdf $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ 'i karakterize eden rasgele ölçüler olarak alınsın. Buradaki ağırlıklar

normalize $\sum_i w_k^i = 1$ ise k anındaki sonsal dağılımın yaklaşımının aşağıdaki gibi olacağı monte carlo örnekleme metotlarını anlatırken detaylı olarak gösterilmmişti.

$$p(x_{0:k} | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_k} w_k^i \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^i) \quad (3.1)$$

Ağırlık değerleri IS prensibine (Bergmann, 1999) göre seçilir. Dolayısıyla, eğer örnekler $q(x_{0:k} | z_{1:k})$ önem dağılımından alınmışsa (3.1) denklemleri ile verilen ağırlıklar aşağıdaki gibi olur.

$$w_k^i \propto \frac{p(x_{0:k}^i | z_{1:k})}{q(x_{0:k}^i | z_{1:k})} \quad (3.2)$$

\propto arada tam bir eşitlik yerine orantılılık olduğunu gösterir. Ağırlıkların toplamının 1 olacağı sonucuyla (3.2) oranını eşitliğe dönüştürecek sabit katsayı bulunabilir.

Sıralı sınıfa geri dönülürse; her zaman adımında, $p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$ dağılımına yaklaşıklık oluşturan örnekler $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımının yeni bir dizi parçacıkla yaklaşımı oluşturulmak isteniyor olsun. Eğer önem dağılımını aşağıdaki gibi faktörize edilebilecek şekilde seçilirse;

$$q(x_{0:k} | z_{1:k}) = q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \quad (3.3)$$

Var olan $x_{0:k-1}^i \sim q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$ örneklerine yeni durum $x_k^i \sim q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k})$ örneklerini ilave edilerek, $x_{0:k}^i \sim q(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımından örnekleri oluşturabilir. Ağırlık güncelleme denklemlerini oluşturmak için önce $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ dağılımını denklem (3.4) deki gibi $p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$, $p(z_k | x_k)$ ve $p(x_k | x_{k-1})$ dağılımları cinsinden açılır.

$$\begin{aligned}
p(x_{0:k} | z_{1:k}) &= \frac{p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}) p(x_{0:k} | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \\
&= \frac{p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}) p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \times p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \\
&= \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \times p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \\
&\propto p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4) denklemlerini (3.2) denkleminde yerlerine konursa, ağırlıklar için güncelleme eşitliği (3.5)'teki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
w_k^i &\propto \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i) p(x_{0:k-1}^i | z_{1:k-1})}{q(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k}) q(x_{0:k-1}^i | z_{1:k-1})} \\
&= w_{k-1}^i \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k})}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Üstelik eğer $q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) = q(x_k | x_{k-1}, z_k)$ ise, önem yoğunluğu sadece x_{k-1} ve z_k 'ya bağlı hale gelecektir. Bu, özellikle her zaman adımı için sadece $p(x_k | z_{1:k})$ in kestiriminin gerektiği durumda kullanışlıdır. Bu sebeple aksi kesin bir şekilde söylenmediği sürece bu kabul yapılır. Böyle bir senaryo için, sadece x_k^i in saklanması yeterli olacaktır ve $x_{0:k-1}^i$ değerleri ile $z_{1:k-1}$ geçmiş gözlemleri atılabilir. Bu durumda değiştirilmiş ağırlıklar:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i, z_k)} \tag{3.6}$$

ve sonsal filtreleme dağılımı

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_k} w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \tag{3.7}$$

şeklinde olur. Örnek sayısı sonsuza giderken (3.7) yaklaşıklığının gerçek sonsal dağılıma $p(x_k | z_{1:k})$ yaklaştığı gösterilebilir (Doucet ve diğ., 2001). Böylece SIS

algoritması, her bir gözlem zamanda sıralı olarak alındığında ağırlıkların ve örneklerin özyineli yayılmasından oluşur.

ALGORİTMA 1: SIS PARÇACIK FİLTRESİ

$$\left[\left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right] = SIS \left[\left\{ x_{k-1}^i, w_{k-1}^i \right\}_{i=1}^{N_s}, z_k \right]$$

- FOR $i=1: N_s$
 - $x_k^i \sim q(x_k^i | x_{k-1}^i, z_k)$ örnekle
 - (6)denklemine göre parçacığa ağırlık ata w_k^i
 - END FOR
-

Şekil 3.1: SIS Algoritması

3.1.2. Dejenerasyon Problemi

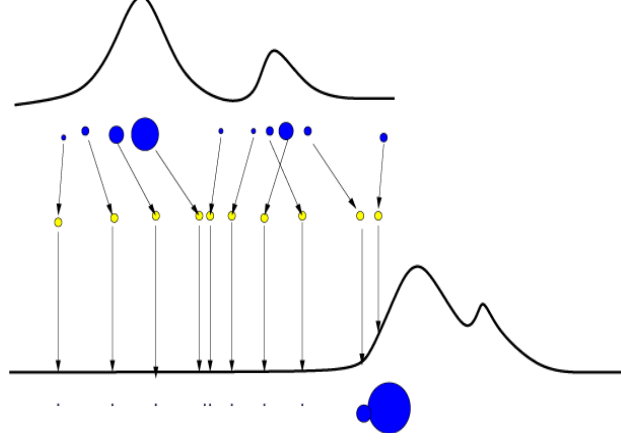
SIS filtresinde ortaya çıkan genel problem dejenerasyon olgusudur. Birkaç iterasyondan sonra bir iki parçacık dışındaki parçacıkların ağırlıkları ihmal edilebilir düzeye gelecektir. Doucet (2000) önem ağırlıklarının varyansının zamanla arttığı göstermiştir. Bu sonuçla dejenerasyon olgusundan sakınmak mümkün değildir. Bu dejenerasyon sonsal dağılıma katkısı neredeyse sıfır olacak parçacıklar üzerinde gereksiz yere çok hesapsal çaba harcamamıza neden olur. Algoritmanın ne kadar dejenere olduğunun uygun bir ölçüsü etkin örnek boyutudur N_{eff} . Bergmann (1999) ve Liu ve Chen (1998) makalelerinde üretilmiş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$N_{eff} = \frac{N_s}{1 + Var(w_k^{*i})} \quad (3.8)$$

Burada $w_k^{*i} = p(x_k^i | z_{1:k}) / q(x_k^i | x_{k-1}^i, z_k)$ “gerçek ağırlık” olarak işaret edilmiştir. Bu kesin bir şekilde hesaplanamaz fakat N_{eff} ’ in kestirimi \hat{N}_{eff} kestirimi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_s} (w_k^i)^2} \quad (3.9)$$

Buradaki w_k^i (3.4) denkleminde elde edilmiş normalize ağırlıklardır. Görüldüğü gibi $N_{eff} \leq N_s$ tir ve küçük N_{eff} değerleri güçlü dejenerasyon etkisini işaret etmektedir. Şüphesiz dejenerasyon problemi parçacık filtrelerinde sakıncalı bir etkidir. Bu istenmeyen etkiyi azaltmak için yapılabilecek en kaba çözüm örnek sayısını N_s artırmaktır. Bu çoğu zaman elverişsizdir ve bundan dolayı iki farklı metoda güveniriz. İlki önem dağılımının iyi seçimi ve diğeri ise yeniden örnekleme yapılmasıdır.



Şekil 3.3: Dejenerasyon Problemi

3.1.3 Önem Dağılımının Seçimi

Önem dağılımını $q(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$, $Var(w_k^{*i})$ değerini küçültecek şekilde seçilirse N_{eff} maksimize edilmiş olur. Gerçek ağırlıkların w_k^{*i} varyansını en küçükleyen en uygun önem yoğunluğu (Doucet, 2000) aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$q(x_k | x_{k-1}^i, z_k)_{opt} = p(x_k | x_{k-1}^i, z_k) = \frac{p(z_k | x_k, x_{k-1}^i) p(x_k | x_{k-1}^i)}{p(z_k | x_{k-1}^i)} \quad (3.10)$$

(3.10) eşitliğini (3.5) denkleminde yerine koyarsak, sonuç:

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(z_k | x_{k-1}^i) = w_{k-1}^i \int p(z_k | x_k') p(x_k' | x_{k-1}^i) dx_k' \quad (3.11)$$

x_{k-1}^i, w_{k-1}^i verildiği durumda $q(x_k | x_{k-1}^i, z_k)_{opt}$ önem dağılımından her ne örnek alınırsa alınsın aynı değerli olduğu sürece dağılımın böyle seçilmesi optimaldir. Dolayısıyla x_{k-1}^i ye koşullu varyans sıfır olur $Var(w_k^{*i})=0$. Bu farklı örneklenmiş x_k^i değerlerin sonucu olan farklı ağırlıkların w_k^i varyansındır.

Bu önem dağılımı iki temel sıkıntıyı da beraberinde getirir. Bunlar, $p(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$ 'dan örnek almayı ve yeni örnek üzerinden integral hesaplamayı gerektirmesidir. Genel durumda bunlardan birinin yapılamayacağı açıktır. Optimal önem yoğunluğunun kullanılabilmesi için iki özel durum vardır.

İlk sınıfa x_k sonlu bir takımın üyesi olduğu durumlar girer. Bu tip durumlarda (11) denklemindeki integral toplama dönüşür ve $p(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$ den örnek almak mümkündür. Buna örnek bir uygulama manevralı hedef takibi için Sıçramalı-Markov doğrusal sistemlerinin kullanılması verilebilir.

Analitik hesabın mümkün olduğu ikinci sınıfı $p(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$ 'ın Gauss dağılıma sahip olduğu durumlar oluşturur (Del Moral, 1998). Bu durum ölçümlerin doğrusal ve durum dinamikleri doğrusal değil iken incelenmiştir. Böyle bir sistem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x_k &= f_k(x_{k-1}) + W_{k-1}, & W_{k-1} &\sim N(0, Q_{k-1}) \\ z_k &= H_k x_k + V_k & V_k &\sim N(0, R_k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

f_k doğrusal olmayan bir fonksiyon, H_k gözlem matrisi ve W_{k-1} ile V_k birbirinden bağımsız i.i.d Gauss dağılımlı sırasıyla $Q_{k-1} > 0$, $R_k > 0$ varyanslı dizilerdir.

$$\Sigma_k^{-1} = Q_{k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (3.13)$$

$$m_k = \Sigma_k (Q_{k-1}^{-1} f_k(x_{k-1}) + H_k^T R_k^{-1} z_k) \quad (3.14)$$

Olarak tanımlanırsa $p(x_k | x_{k-1}, z_k) = N(x_k; m_k, \Sigma_k)$ olarak elde edilir ve

$$p(z_k | x_{k-1}) = N(z_k; H_k f_k(x_{k-1}), Q_{k-1} + H_k R_k H_k^T) \quad (3.15)$$

olur. Diğer birçok model için, böyle bir analitik değerlendirme yapmak mümkün değildir. Fakat optimal önem yoğunluğuna yerel doğrusallaştırma teknikleri uygulanarak yarı-optimal yaklaşımlar oluşturulabilir. Böyle doğrusallaştırmalar $p(x_k | x_{k-1}, z_k)$ dağılımının Gauss yaklaşıklığını önem dağılımı olarak kullanır. $p(x_k | x_{k-1}, z_k)$ dağılımına Gauss yaklaşıklığı kestirmede bir diğer yöntem

unscented dönüşüm kullanmaktır (Van Der Merwe ve diğ., 2000). Yazarların fikri böylesi bir önem dağılımı kullanmanın hesapsal maliyetinin, belli bir performansa ulaşmak için kullanılacak örnekleri azaltılmaya çalışmasından daha fazla olacaktır. En nihayetinde yaygın olarak sağladığı işlemsel kolaylık nedeniyle, önem dağılımı olarak önsel kullanılır.

$$q(x_k | x_{k-1}^i, z_k) = p(x_k | x_{k-1}^i) \quad (3.16)$$

Bu dağılım (3.5) denkleminde yerine konursa, önem ağırlıkları eşitlik (3.17)'deki gibi olur.

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(z_k | x_k^i) \quad (3.17)$$

Her ne kadar bu seçim yaygın olsa da, parçacık filtrelerin tasarımında önemli bir başlıktır olan önem dağılımı seçiminde kullanılacak gereğinden fazla opsiyon vardır. İyi bir önem dağılımının bulunamaması ise genel bir problemdir. Örneğin önsel dağılımın önem yoğunluğu olarak kullanıldığı durum ele alırsa; burada ağırlıkların güncellenmesinin (3.17) denkleminde göre olacağı gösterilmiştir. Yeni ağırlık bir öncekine, olabilirlik fonksiyonu üzerinden bağlıdır. Bu durumda eğer önsel dağılım olabilirlik dağılımına göre daha geniş olduğu bir durumda, tersten söylenirse olabilirlik dağılımı daha keskin ise, sadece bu keskin bölgeye düşen parçacıklar büyük ağırlıkla ağırlıklandırılacaktır. Böylesi bir sonuç da filtrede probleme neden olabilir. Yanyana bağlama ve aşamalı düzeltme gibi önsel ve olabilirlik arasında dağılımlar üreterek parçacıkların doğru yerde bulunmasını destekleyen metotlar vardır. Bunlar yardımıyla parçacıklar durum uzayında doğru yerlerine sürüklenir.

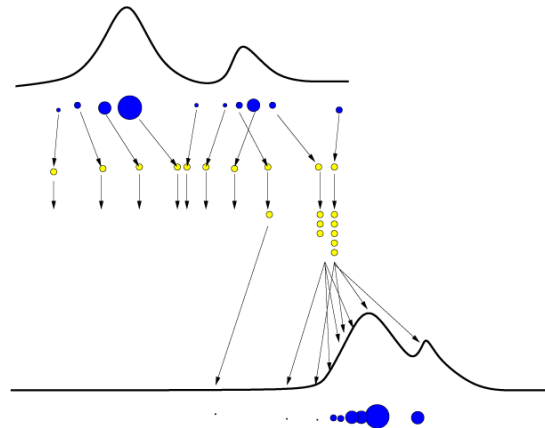
3.1.4. Yeniden Örnekleme

Gordon ve diğ. (1998) yaptıkları çalışma ile filtre sürecine ek bir seçme adımı ekleyerek bu dejenerasyonun etkisinin azaltılabileceğini göstermişlerdir. Bu ek adıma “yeniden örnekleme” adı verilir. Buradaki ana fikir önem ağırlığı büyük değerde olan parçacıkları çoğaltırken, küçük önem ağırlığına sahipleri elemektir. Yeniden örnekleme adımında $p(x_k | z_{1:k})$ yaklaşık gösteriminden (18) N_s defa yeniden örnekleme (yenisiyle değişime) yapıp $\{x_k^{i*}\}_{i=1}^{N_s}$ yeni örnek seti üretilir.

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \quad (3.18)$$

Dolayısıyla herhangi bir j için $\Pr(x_k^{i*} = x_k^j) = w_k^j$ olur. (3.18) ayrık dağılımından elde edilen sonuç örnekler i.i.d'dir ve ağırlıkları $w_k^i = 1/N_s$ eşit olarak atanır.

Yeniden örnekleme deterministik veya dinamik olarak gerçekleştirilebilir. Deterministik gerçekleştirilmede, örnekleme algoritması her koşturulduğunda yeniden örnekleme yapılır. Dinamik planda ise önem ağırlıklarının varyansı sürekli gözlenerek, varyans için önceden belirlenen bir eşik aşıldığında, yeniden örnekleme yapılır. Mesela N_{eff} değerinin belli bir eşik değerinin N_T altına düştüğü durumlarda yapılabilir.

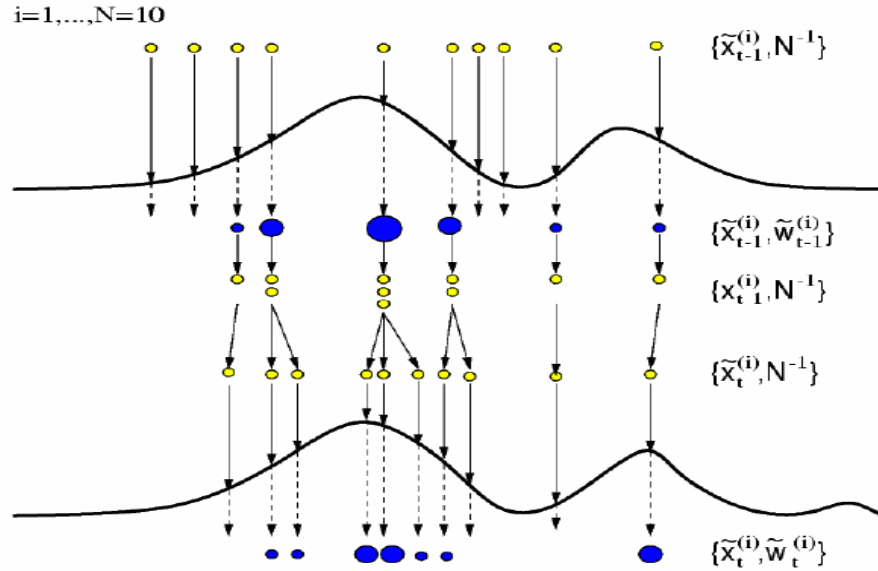


Şekil 3.4: Yeniden Örnekleme

Bunun dışında bu algoritmaya alternatif olarak, artan örnekleme (Liu ve Chen, 1998) ve tabakalı örnekleme gibi, indirgenmiş MC varyasyon açısından daha etkin, farklı yeniden örnekleme düzenekleri uygulanabilir. Sistemik yeniden örnekleme (Kitagawa, 1996) yazarlar tarafından tercih edilen uygulaması kolay bir düzenektir ve işleyiş algoritması şekil 3.5' de verilmiştir. Burada $U[a, b]$, $[a, b]$ aralığında uniform bir dağılımdır. Herbir yeniden örneklenmiş parçacık x_k^{j*} için bu algoritma ayrıca parçacıkların i^j ile gösterilen kaynak indeksini de depolar.

ilerledik yani herbir parçacık için bir kere tüm denklemler koşulur. Ve çok tabi olan bir gerçekse ne kadar çok parça kullanırsanız dağılıma o kadar yaklaşıcağımızdır. Böyle olunca da artan parçacık sayısı ile birlikte hızlı çalışabilmek için işi bölüştürüp, algoritmayı başka bilgisayarlarda paralel olarak çalıştırırız. Fakat parçacıkların birleştiği yeniden örnekleme basamağı bunu yapmamızı engeller. Bu adımın oluşturabileceği bir diğer sorunsal, parçacıklarının çeşitliğinin azalmasıdır. Yeni parçacıklar ağırlığı fazla olandan çoklandığı için, bir anlamıyla kaynakları aynı olduğu için “ parçacık fakirleşmesi” diye adlandırılan bir problem oluşur. Bu sorunun olumsuz etkisi özellikle süreç gürültüsünün az olduğu durumlarda daha fazladır. Yakın geçmişte örnek fakirleşmesi problemi için birçok sistematik teknik önerilmiştir[1]. Bu teknikler önem örnekleme-yeniden örnekleme ve MCMC örnekleme ile aynı süreçlere dayansalar da örnek fakirleşmesini önlerler. Ayrıca Yeniden örnekleme süreci kestirimcinin üzerine ek varyans ekler. Bu varyansı azaltmak için yeniden örnekleme frekansı düşürülebilir. Yani yeniden örnekleme adımını filtrenin her koşulunda tekrarlamak yerine, parçacık ağırlıklarının zorunlu koştuğu durumlarda yaparak, varyans küçültülebilir.

Temel parçacık filtresinin buraya olan başlıklara dayalı olarak oluşturulmuş algoritması Şekil 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3.7: Parçacık Filtre

GENEL PARÇACIK FİLTRE ALGORİTMASI

$$\left[\left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right] = PF \left[\left\{ x_{k-1}^i, w_{k-1}^i \right\}_{i=1}^{N_s}, z_k \right]$$

- FOR $i = 1 : N_s$
 - $x_k^i \sim q(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$ çek
 - (4) eşitliğine göre parçacığa ağırlık ata w_k^i
 - END FOR
 - Toplam ağırlığı hesapla: $t = TOP[\{w_k^i\}_{i=1}^{N_s}]$
 - FOR $i = 1 : N_s$
 - Ağırlıkları normalize et: $w_k^i = t^{-1} w_k^i$
 - END FOR
 - (9) eşitliğini kullanarak \hat{N}_{eff} hesapla
 - IF $\hat{N}_{eff} < N_T$
 - Algoritma 2 'yi kullanarak yeniden örnekleme yap:

$$\left[\left\{ x_k^{j*}, w_k^j, i^j \right\}_{j=1}^{N_s} \right] = YENİDEN \ ÖRNEKLE \left[\left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right]$$
 - END IF
-

Şekil 3.8: Standart Parçacık Filtre

3.2. DİĞER PARÇACIK FİLTRELERİ

Şimdiye kadar geliştirilmiş birçok parçacık filtresinin temelini daha önceki bölümde ele alınan SIS algoritması oluşturur. Literatürdeki önerilen diğer parçacık filtreleri genel SIS algoritmasının özel durumları olarak düşünülebilir. Bu çeşitlendirmeyi oluşturan temel farklar, önem dağılımın seçimine ve/veya yeniden örnekleme metotlarına dayanır. Bu bölümde, tezde kullanılan farklı parçacık filtre tipleri ele alınacak ve bunların temel SIS algoritmasından nasıl çıkarıldıklarına bakılacaktır.

3.2.1. Bootstrap Filtre

Bootstrap algoritması özyineli bayesçi filtrenin gerçekleşmesi için önerilmiştir (Gordon ve diğ., 1993). Bu metod doğrusallık ve gauss gürültüsü sınırlandırması getirmeden herhangi bir durum veya ölçüm modeline uygulanabilir.

Bu filtrenin kullanabilmesi için yapılacak kabuller şöyledir:

- (a) (1) ve (2) deki durum dinamiği f_k ve gözlem fonksiyonlarının h_k bilinmeli
- (b) sistem gürültü dağılımından $p(W_k)$ örnek alınabilmeli
- (c) önsel dağılımdan $p(x_0)$ örnek alınabilmeli
- (d) Olabilirlik dağılımının $p(z_k|x_k)$ fonksiyonel formu bilinmeli.

Bu az sayıdaki kabulle sonsal dağılımın yaklaşığı parçacıklarla oluşturulabilir. Filtre algoritması SIS algoritmasından kolayca türetilir.

- Önem dağılımı : $q(x_k|x_{k-1}^i, z_{1:k})$ durum geçiş dağılımı $p(x_k|x_{k-1}^i)$ olarak alınır.
- Yeniden örnekleme adımı: her zaman adımında uygulanır.

Seçilen önem dağılımından örnekler, $x_k^i \sim p(x_k|x_{k-1}^i)$, elde edilmesi için öncelikle süreç gürültüsünden örnekler alınır $W_{k-1}^i \sim p_W(W_{k-1})$ ve önsel dağılımdan alınan örneklerle birlikte durum modeline sokularak $x_k^i = f_k(x_{k-1}^i, W_{k-1}^i)$ elde edilir. Daha sonra önem dağılımının bu özel seçimi için parçacıklara ait önem ağırlıkları hesaplanır.

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(z_k|x_k^i) \quad (3.19)$$

Yeniden örnekleme algoritması anlatılırken de belirtildiği gibi, parçacıkların yeniden örneklemeinde atanan ağırlıklar eşit ve $w_{k-1}^i = 1/N$ şeklindedir. Yeniden örnekleme her adımda gerçekleştirdiği için (3.19) oranısı aşağıdaki gibi olur.

$$w_k^i \propto p(z_k|x_k^i) \quad (3.20)$$

(3.20) oranı ile verilen ağırlıklar yeniden örnekleme aşamsından önce normalize edilir. BF için algoritma iterasyonu şekil 3.9'da verilmiştir.

Önem dağılımının aşağıdaki algoritmadaki gibi gözlemlerden bağımsız seçilmesi filtreyi verimsiz kılabilir ve aykırı değerlere duyarlı hale getirebilir. Ayrıca her adımda yeniden örnekleme yapılması örneklerdeki çeşitliliğin hızla azalmasına sebep verecektir. Fakat bu sıkıntılara rağmen önem ağırlıklarının kolayca hesaplanabilmesi ve önem dağılımından kolayca örnek alınabilmesi bu filtrenin avantajıdır.

 ALGORİTMA 4: BOOTSTRAP FİLTRE

$$\left[\left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right] = BF \left[\left\{ x_{k-1}^i, w_{k-1}^i \right\}_{i=1}^{N_s}, z_k \right]$$

- FOR $i = 1 : N_s$
 - $x_k^i \sim p(x_k | x_{k-1}^i)$ örneklerini oluştur.
 - $w_k^i = p(z_k | x_k^i)$ ağırlıkları hesapla.
 - END FOR
 - Toplam ağırlığı hesapla: $t = TOP \left[\left\{ w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right]$
 - FOR $i = 1 : N_s$,
 - Ağırlıkları normalize et: $w_k^i = t^{-1} w_k^i$
 - END FOR
 - Yeniden Örnekleme yap: $\left[\left\{ x_k^{j*}, w_k^j, i^j \right\}_{j=1}^{N_s} \right] = YENİDEN \ ÖRNEKLE \left[\left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^{N_s} \right]$
-

Şekil 3.9: Bootstrap Filtre

3.2.2. RBPF

Nümerik yöntemlerle optimal kestirimciye ulaşılmasa da MC kestiriminin varyansını düşürmek için birçok metot geliştirilmiştir. Bizse hedef takibi uygulamasında, istatistikte temel olarak varyans iyileştirmede kullanılan Rao-Blackwellisation teorimi üzerinden geliştirilmiş RBPF (Rao-Blackwellisation parçacık filtrelerini) kullandık. Bu teoremin özü koşullu ve koşulsuz varyans arasındaki ilişkiye dayanır. u ve y gibi iki değişkene bağlı $\tau(u, y)$ kestirimcisinin varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{var}(\tau) = \text{var} \left[E \{ \tau(U, Y) | Y \} \right] + E \left[\text{var} \{ \tau(U, Y | Y) \} \right] \quad (3.21)$$

Bu ilişkiye dayanarak τ kestirimcisinin Rao-Blackwell versiyonu olarak adlandırılan yeni bir $\tau' = E \{ \tau(U, Y) | Y \}$ olarak tanımlanır. Görüldüğü bu τ' kestirimcisinin ortalama değeri τ ile aynı iken varyansında $E \left[\text{var} \{ \tau(U, Y | Y) \} \right]$ kadar iyileştirme sağlanmış olur.

Burada (u, y) değişkenlerinin seçimi için birçok seçenek vardır fakat bunların hepsi uygun değildir. Tezde ele alınan uygulamalarda, incelenen filtrelerin avantajlarını da gözeterek, durum vektörü analitik çözüme imkan veren ve vermeyen (dolayısıyla nümerik yöntemlerle hesaplanabilen) olarak ikiye ayrılmıştır. Bunun sonucunda teorem gereği

kestirimin varayansı azaltılırken, dağılımı ifade etmede kullanılması gereken parçacıkların sayısında etkili bir düşüş gözlenilmiştir.

Genel olarak, $p(x_k | z_{1:k})$ sonsal dağılımı analitik olarak hesaplanabilen ve hesaplanamayan kısım olmak üzere ikiye ayrıldı ve durum değişkeni de bu çerçevede x_k^a ve x_k^{pf} olmak üzere ikiye bölündü.

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^{pf} \\ x_k^a \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Sonsal dağılım ise bu iki değişken cinsinden aşağıdaki gibi faktörize edildi.

$$p(x_k | z_{1:k}) = p(x_k^a | x_k^{pf}, z_{1:k}) \times p(x_k^{pf} | z_{1:k}) \quad (3.23)$$

RB filtrenin gerçekleştirilebilmesi için, $p(x_k^a | x_k^{pf}, z_{1:k})$ dağılımı analitik olarak hesaplanabilen (ortalaması ve varyansı verilen bir gauss olabilir) bir dağılım olarak seçilir veya durum modeli izin veriyorsa durum değişkeni bunu sağlayacak şekilde ayrılır. $p(x_k^{pf} | z_{1:k})$ dağılımı ise $\{w_k^i, x_k^{pf,i}\}$ rasgele ölçüsüyle gösterilen kısma aittir. Bu kabulde (2) denkleminin yaklaşığı aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_k} p(x_k^a | x_k^{pf,i}, z_{1:k}) w_k^i \delta(x_k^{pf} - x_k^{pf,i}) \quad (3.24)$$

Bu açılımla diğer filtrelerdeki gibi sonsal dağılım oluşturulabilir. Buradaki fark işlemin analitik ve nümerik olarak iki koldan yürütülmesidir.

Bu çalışmada filtrenin getireceği avantajı diğer filtrelerle kıyaslamak ve formülizasyon kolaylığı için iki kısma rahatlıkla ayırabilen modeller üzerinde çalıştık. Mesela açı ölçümü ile hedef takibi uygulamasında olduğu gibi, dinamik durum modelinin doğrusal ölçüm modelinin doğrusal olmadığı durumlar gibi. Buradaki durum ve gözlem modellerinin gösterimi aşağıdaki gibi parçalı şekilde yapıldı:

$$\begin{bmatrix} x_k^{pf} \\ x_k^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{pf} & F_{pf,a} \\ F_{a,pf} & F_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1}^{pf} \\ x_{k-1}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k^{pf} \\ w_k^a \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$z_k = h(x_k^{pf}, V_k) \quad (3.26)$$

Sistem gürültüsü Gauss, beyaz ,birbirinden bağımsız ise ve x_0^a, x_0^{pf} başlangıç durumları birlikte gauss ise, sonsal dağılımlar doğrusal kısımlar için Kalman filtre ve doğrusal olmayan kısımlar için parçacık filtresi kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} p(x_k^{pf} | x_{k-1}^a, x_{k-1}^{pf}) &= N(F_{pf} x_{k-1}^{pf} + F_{pf,a} x_{k-1}^a, Q^{pf}) \\ p(x_k^a | x_{k-1}^a, x_{k-1}^{pf}) &= N(F_{pf,a} x_{k-1}^{pf} + F_a x_{k-1}^a, Q^a) \\ p(x_k^{pf}, x_k^a | x_{k-1}^{pf}, x_{k-1}^a) &= p(x_k^{pf} | x_{k-1}^a, x_{k-1}^{pf}) p(x_k^a | x_{k-1}^a, x_{k-1}^{pf}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

ALGORİTMA 5: RBPF

- x_k^{pf} ait başlangıç dağılımından $\{x_0^{pf,i}\}$ değerlerini örnekle $m_0^{a,i} = m_0$ olacak şekilde ayarla.
 - FOR $k = 1 : \text{SonAn}$
 - FOR $i = 1 : N_s$
 - Önem dağılımını bul: $p(x_k^{pf} | x_{0:k-1}^{pf,i}, z_{1:k-1})$
 - Örnek al: $x_k^{pf,i} \sim p(x_k^{pf} | x_{0:k-1}^{pf,i}, z_{1:k-1})$
 - $p(x_k^a | x_{0:k}^{pf,i}, z_{1:k})$ dağılımının ortalamasını $m_k^{a,i}$ ve kovaryansı C_k^a hesapla
 - Ağırlıkları hesapla: $w_k^i \propto p(z_k | x_k^{pf,i})$
 - Yeniden Örnekle
 - END FOR
 - END FOR
-

Şekil 3.10: RBPF Algoritması

3.2.3. UPF

(3.6) eşitliği ile verilen ağırlık yinelemesinde paydayı oluşturan önem/öneri dağılımının parçacık filtrelerinin performansını nasıl etkilediğinden ve seçiminin PF tasarımında önemli bir unsur olduğundan daha önceki başlıklarda detaylı olarak bahsedilmişti. Yine öneri dağılımı için optimal seçiminin (3.10) denklemini uyarınca son gözlemleri de dahil edecek şekilde olması gerektiği gösterilmişti. Bu seçimi yapabilmeyen iki sınırlı durum için mümkün olduğu açıklanmıştı. Her ne kadar optimal olmasa da matematiksel kolaylık sağladığı için yaygın olarak (3.12) denklemini ile verilen durum geçiş

dağılımının öneri dağılımı olarak kullanıldığı belirtilmişti. Bu seçimin sonucunda ağırlık yinelemesi (3.7) denklemi kullanılarak yapılabilmekteydi. Yani $w_k = w_{k-1}p(z_k | x_k)$ şeklinde. Fakat görüleceği üzere bu değişimde alınan gözlemlerin hiçbir etkisi yoktur yani bir anlamda bu sürecin işlemesi alınan gözlemin ne olduğundan bağımsızdır. Böylesi bir sonucun, gözlemlerden yararlanılarak yapılan filtreleme işlemini olumsuz etkileyeceği açıktır. Bu sebeble daha anlamlı bir kestirim için öneri dağılımının seçiminde, model el verdiği ölçüde, optimaliteye sadık kalınmalıdır ve yeni gözlemler öneri dağılımına dahil edilebilmelidir. Bunun sağlanması için izlenebilecek bir yöntem (3.12)-(3.15) eşitliklerinde de gösterildiği gibi öneri dağılımı üretirken gauss yaklaşımlara (Kalman gibi) başvurmalıdır.

$$q(x_k | x_{k-1}, z_k) = p_G(x_k | x_{k-1}, z_k) = N(\hat{x}_k, \text{cov}[x_k]) \quad (3.28)$$

Tabi ki bunu yapmaya doğrusal olmayan model imkan vermiyorsa EKF ve UKF gibi doğrusal olmayan modellerin durum kestiriminde gauss yaklaşımla esasına dayanan bayesçi filtreler kullanılır. EKF kullanılarak yapılan öneri dağılımı teklifi ile standart parçacık filtreye kıyasla önemli bir performans artışı sağlanır. Fakat nonlineritesi yüksek olan bir modelde EKF filtre durumun kovaryansını doğru hesaplayamayacak ve yanlış sonuca yönelecektir. Bu kısımda ise bu problem adresli olarak önerilen ve tezde uygulamasını yaptığımız UPF filtre ele alınmıştır.

Unscented Parçacık Filtre (UPF) öneri dağılımı üretimi için UKF'yi kullanır ve EKF'ye kıyasla daha doğru kestirimler üretir (Wan, van der Merwe, Nelson 2000). UKF ele alınırken belirtildiği gibi, Unscented Kalman Filtre Ut dönüşümüne dayanarak MMSE kestirimi bulur (MMSE denk.). Esas olarak parçacık filtresindeki her bir parçacık için UKF koşturulur. Daha önce filtre algoritmalarında kestirim için kullanılan $\hat{x}_{k|k}$ yerine ukf kestirimi için $\bar{x}_{k|k}^i$ notasyonu kullanılarak oluşturulan filtre algoritması şekil 3.11'de verilmiştir.

 ALGORİTMA 5: UPF

Başlangıç Parçacıkları: $\{\bar{x}_{0|0}^i, P_{0|0}^i = P_0\}$

$$\bar{x}_{0|0}^i = m_{x_0}, \quad P_{0|0}^i = P_0$$

Başlangıç Ağırlıkları: $w_0^i = 1/N_s$

- FOR $k = 1 : son_an$
 - UKF eşitliklerini kullanarak $\bar{x}_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i$ den $\bar{x}_{k|k}^i, P_{k|k}^i$ değerleini hesapla.
 - UKF ile oluşturulan öneri dağılımından örnek al: $x_k^i \sim N(\bar{x}_{k|k}^i, P_{k-1|k-1}^i)$
 - Ağırlıkları hesapla: $w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | z_{1:k})}$
 - IF $\hat{N}_{eff} < N_T$
 Algoritma 2 'yi kullanarak yeniden örnekleme yap
 - END IF
 - END FOR
-

Şekil 3.11: UPF Algoritma

4. BULGULAR

Hedef takibi uzun yıllardır üzerinde çalışma yapılan aktif bir çalışma alanıdır. Buradaki amaç gözlenen nesnenin kinematiğini kestirmektir. Bununla ilgili olarak; kullanılan sensör modelleri, olası hedef modelleri ve kestirim tekniklerinin bulunabileceği literatürde birçok güzel kitap yer almaktadır. Bunlardan bazıları, bu çalışmada kaynak olarak kullanılanlar, şunlardır: Bar-Shalom ve Li 1993; Blackman ve Popoli 1999; Bergman 1999 ; Ristic, Arulampulam ve Gordon 2004.

Hedef takibi için radar ve IR (kızıl ötesi) sensörler yaygın olarak kullanılır. Genel olarak sensörler aktif ve pasif olarak ikiye ayırmak mümkündür. Pasif sensörler herhangi bir cisimden yansıyan yada yayılan enerjiyi dedekte edebilirken; aktif sensörlerin ise kendilerinin üretip dağıtabildikleri elektromagnetik enerjileri vardır ve bu enerjiden hedefe çarpıp kendilerine dönenleri kayıt ederler. Bu bağlamda hedef takibi uygulamasında kullanılan pasif IR sensörlerinden hedefe olan açı bilgisi elde edilirken radar sensörlerinden erim ve erim değişim hızı (dopler radar gibi) elde edilebilir.

Yukarıda bahsedildiği gibi genellikle sensörlerle hedefe ait bazı bilgiler elde eilebilir, yani hedefin tüm kinematiğine direk ulaşılamaz. Bu noktada ise önceki bölümlerde ele alınan kestirim teknikleri kullanılır. Bir çok hedef takibi uygulaması ise anında hesaba ihtiyaç duyar veya gerektirir. Bu sebeble özyineli kestirim metotlarının kullanılır. Kestirim yaparken bir başka amaç da şüphesiz her daim var olan gürültünün etkisini azaltmak ve sinyalin kalitesini yükseltebilmektir. Seçilen kestirim metotuna göre kestirim performans ve eş-zamanlılık (bilgisayar sisteminin alınan bilgiyi aynı anda işleyebilmesi) gibi konular önem taşır.

Yine daha önceki bölümlerde üzerinde detayları ile durduğumuz gibi alınan ölçümlerden çıkarım yapan kestirimci teknikleri ölçüm ve sistem dinamiğine (hedefin durum değişimine) göre farklılık göstermekteydi. Doğrusal bir modele göre değişen bir durumun kestirimini yapmak doğrusal olmayan modele görece daha kolaydı. Aynı

zamanda sistemdeki belirsizlikler de Gauss dağılımla modellenilebiliyorsa veya bu kabul yapılıyorsa analitik olarak kolayca ulaşılabilen kestirimci optimum değerde oluyordu. Gauss dağılıma sahip olmak şartı ile doğrusal olmayan durum modellerde, doğrusal olmayan fonksiyonların çeşitli doğrusal seri açılımları kullanılarak oluşturulan yaklaşık doğrusal model üzerinden yarı-optimal sonuçlara ulaşılır. Aynı şekilde Gauss dağılıma sahip olmayan belirsizlikler ve gürültüler içinde çeşitli gauss yaklaşıklıklar oluşturularak bu tip yarı-optimal çözümlere varmak mümkündür. Tüm bu yaklaşık analitik çözümlere alternatif olarak Monte Carlo örnekleme esasına dayanan ve geleneksel yöntemlerden daha iyi sonuçlar üreten yöntemler son zamanlarda yaygın kullanılmaktadır. Bu metotlarla gelen en büyük avantaj istem modeli üzerinde doğrusallık ve gauss kabuller gibi hiçbir kısıtlama getirmeden daha realistik durumlara çözüm üretebilmeleridir. Hedef takibi (Gordon ve diğ.), ses işaretlerinin restorasyonu (Godsill ve diğ.), CDMA (Punsakaya ve diğ.), bilgisayar görüşü (Blake ve diğ.), gen araştırmaları (Haan ve Godsill), dizi işleme (Reilly ve diğ.), finansal data analizi (Freitas ve diğ.) sonar (Gusstafson) ve daha birçok alanda uygulamaları giderek artmaktadır. Bu kadar yaygın kullanımın bir nedeni Bayesçi çerçevenin sağladığı esnek ve tutarlı yaklaşımdır. Diğer neden ise yoğun hesap ve işlem gücü gerektiren bu yöntemlerin kullanımını mümkün kılan hesapsal güçteki artıştır. Analitik olarak ulaşamadığınız çözüme nümerik olarak örnekler/parçacıklar yoluyla ulaşmanızı sağlayan bu formülizasyonlardaki tahmin edilebilecek kabul örnek sayısının artmasıyla sonuca daha doğru ulaşılabilirdir. Parçacık sayısı sonsuza giderken nümerik çözüm analitik çözüme yakınsayacaktır. Tabii ki hesapsal yükü yoğun bu süreçlerde yakınsamanın hızı önemli bir başlıktır. Esas olarak sıralı örnekleme dayanan oluşturulan algoritmalar da kendi içinde kimi kriterlere göre farklılık göstermektedir. Fakat bu farklılığın nedenini daha çalışmaların evrimsel süreci oluşturmaktadır. Yeni önerilen metot aynı prensibin bir eksiğini kapatmaya dayalıdır ve dolayısıyla oluşan nümerik bayesçi yöntemler bir gelişim sürecinin ürünleri olarak ele alınabilir. Bu çalışmada da hedef takibi problemi üzerinde, bu problem üzerinde önemli olan kimi kriterlere göre (kestirim hatası, algoritma hızı, kabuller) kıyaslaması yapılmış, mevcut ölçüm senaryosu için en uygun yöntemler önerilmiştir.

Takip uygulamalarında elde edilen iki temel ölçüm tipine göre gerçekleştirilen kullanılan ürettikleri sonuçlar aşağıda sırayla verilmiştir.

4.1. AÇI ÖLÇÜMLERİNİ KULLANARAK HEDEF TAKİBİ

Radar, sonar veya IR sensör bilgisi kullanan birçok uygulamda açı ölçümü ile hedef takibi yaygın bir tekniktir.

Tipik olarak radar ve sonar sensörleri aktif modda çalışır. Bu modda sensörlerden erim ve bazen de erim değişim oranı (dopler radardaki gibi) elde edilir. Fakat askeri uygulamadaki gibi gizlilik gerektiren bazı durumlarda düşman uçaklarından veya yabancı hedeflerden sakınmak için sensörler pasif moda çekilir. Ya da aktif sensörlerin pasif modda kullanılması yerine IR sensörler kullanılabilir. Pasif sensörler ise prensip olarak hedefe olan açı bilgisini sağlarlar. Bu sebeble pasif sensörlerin kullanılan veya kullanılması gereken yerlerde sadece açı ölçümlerini kullanarak çıkarım yapılabilmesi önemlidir. Burada farklı filtrelerle aşağıda verildiği gibi modellenmiş bir sistemde hedefin konumu kestirilmiştir.

Hedef iki boyutlu düzlemde standart ikinci dereceden modele göre hareket ediyor.

$$x_k = Fx_{k-1} + Cw_k \quad (4.1)$$

Burada; $x_k = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$ ve $w_k = (w_x, w_y)_k^T$ dir.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Sistem gürültüsü sıfır ortalamalı kovaryansı Q olan beyaz gauss gürültüsü. $E[w_k w_j^T] = Q\delta_{jk}$. Burada gürültüler beyaz yani,

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

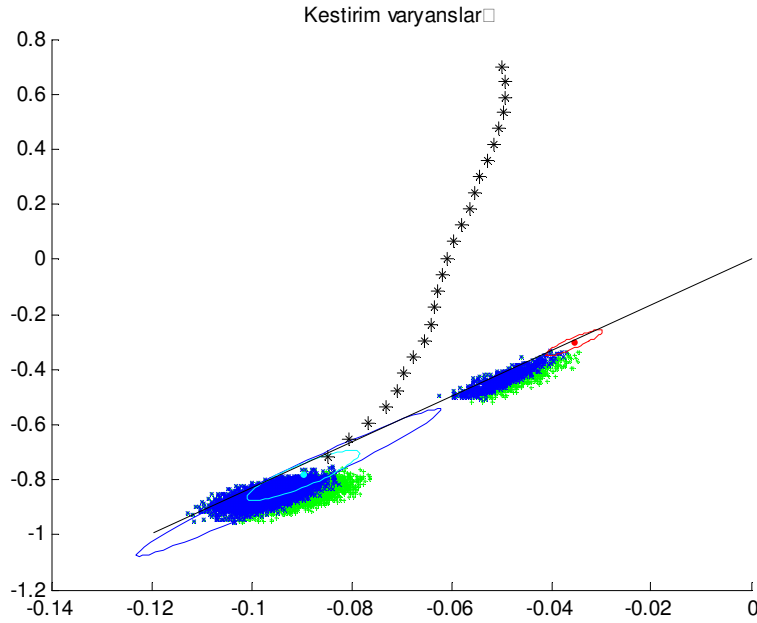
olarak alındı. (0,0) noktasına yerleştirilen gözlemciden hedefe ait gürültülü açı gözlemleri almıyor.

$$z_k = \tan^{-1}(y_k / x_k) + v_k \quad (4.4)$$

Gözlem gürültüsü de sıfır ortalamalı R kovaryanslı beyaz gauss gürültüsü. Hedefin başlangıç durumu $x_0 = [-0.05 \ 0.001 \ 0.7 \ -0.055]^T$ ortalamalı ve $P_{0|0}$ kovaryanslı gauss dağılımı olarak alınıyor.

$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Gürültü varyansları $q = 1.10^{-6}$ ve $R = 5.10^{-6}$ olarak alındı.



Şekil 4.1: Bootstrap-EKF ve UKF kestirim varyansları

Bu şekilde, kullanılan filtrelerin varyansları çizdirilmiştir; EKF (kırmızı), UKF (cam göbeği) ve parçacık filtre (mavi). Yeşil renkle gösterilenler başlangıç parçacıkları, maviler ise yeniden örnekleme sonucu oluşan parçacıkları göstermektedir. Gerçek durum ve gözlemler siyahla gösterilmiştir.

4.1. ERİM ÖLÇÜMÜ İLE HEDEF TAKİBİ PROBLEMİ

4.1.1. Model

Durum vektörü, $x_k = [x_{1k} \ x_{2k} \ x_{3k} \ x_{4k}]^T$, x-y boyutlarındaki konum ve hız değerlerinden oluşmaktadır. Hedefin kinematikleri:

$$x_{1k} = x_{1k-1} + \dot{x}_{1k-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{1k-1}\Delta t^2 + \frac{1}{3}\dddot{x}_{1k-1}\Delta t^3 \quad (4.6)$$

$$x_{2k} = x_{2k-1} + \dot{x}_{2k-1}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{2k-1}\Delta t^2 + \frac{1}{3}\dddot{x}_{2k-1}\Delta t^3 \quad (4.7)$$

şeklinde. \dot{x}_{1k} ve \dot{x}_{2k} sırasıyla x ve y yönlerindeki ivmeyi, \ddot{x}_{1k} ve \ddot{x}_{2k} ise ivmedeki değişimi göstermektedir. Δt ise durumlar arasındaki geçiş zamanı yani örnekleme zamanıdır. (4.1) ve (4.2) kullanarak, (2.6) genel denklemi şeklinde, durum modeli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \dot{x}_{1k} \\ \dot{x}_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k-1} \\ x_{2k-1} \\ \dot{x}_{1k-1} \\ \dot{x}_{2k-1} \end{bmatrix} + \sqrt{q}Q^{1/2} \begin{bmatrix} v_{k-1}^1 \\ v_{k-1}^2 \\ v_{k-1}^3 \\ v_{k-1}^4 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \Delta t^3/3 & 0 & \Delta t^2/2 & 0 \\ 0 & \Delta t^3/3 & 0 & \Delta t^2/2 \\ \Delta t^2/2 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t^2/2 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Burada q süreç gürültü yoğunluğunu kontrol etmek için kullanılır.

(4.4) ile verilen durum hata kovaryans matrisidir ve (4.1)-(4.2)'deki ivme terimlerini modeller.

Erim ölçümler konumları (x_A, y_A) ve (x_B, y_B) olan iki sensörden alındı. Gözlem denklemi,

$$z_k = \begin{bmatrix} d_A[k] \\ d_B[k] \end{bmatrix} + V_k, \quad V_k \sim N(0, R), \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Burada $d_A[k]$ ve $d_B[k]$ sensörlerden olan uzaklığı belirtiyor,

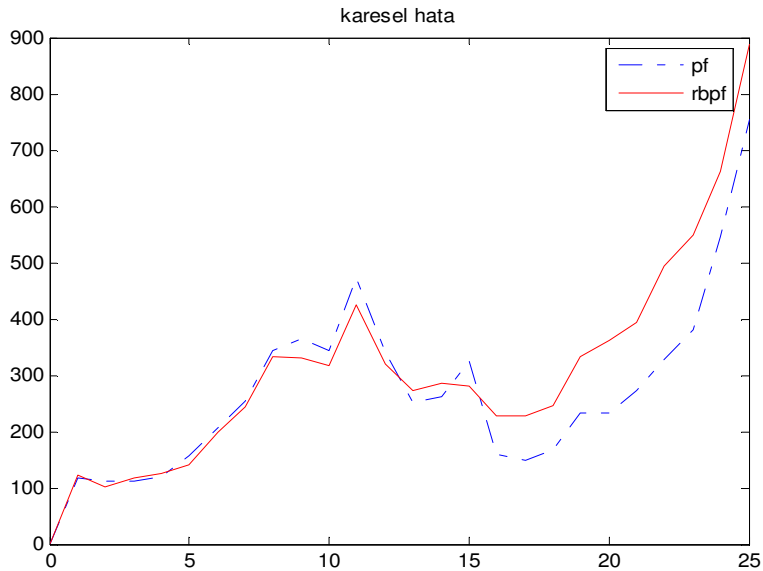
$$\begin{aligned} d_A[k] &= \sqrt{(x_{1k} - x_A)^2 + (x_{2k} - y_A)^2} \\ d_B[k] &= \sqrt{(x_{1k} - x_B)^2 + (x_{2k} - y_B)^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Gürültü yoğunluğu $q = 0.01$, örnekleme zamanı $\Delta t = 2$ sn. ve sensor konumları $x_A = 30, y_A = 0, x_B = 0, y_B = 30$ alınarak filtre denklemleri koşturuldu. Başlangıç dağılımı olarak ortalaması $x_0 = [0 \ 10 \ 1 \ 0]^T$ ve kovaryansı $P_{0|0}$ olan Gauss dağılımı alındı.

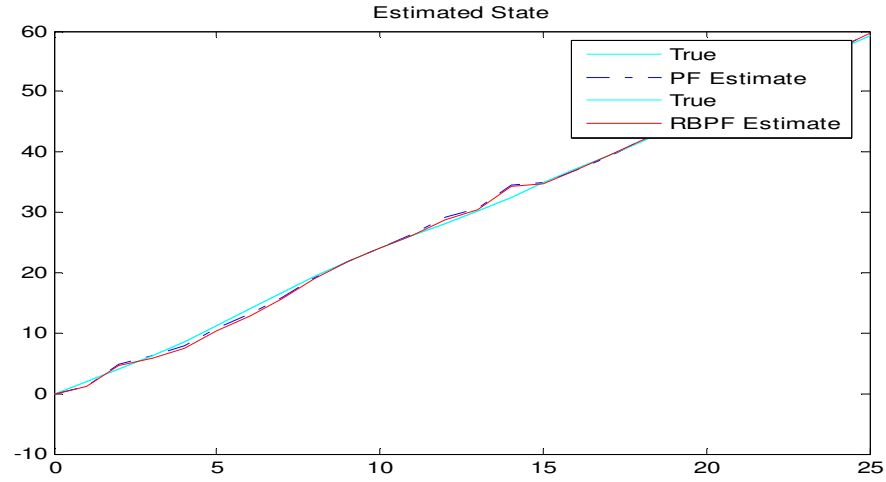
$$P_{0|0} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.1.2. UKF, Standart Parçacık Filtre ve RBPF ile kestirim

Durum ve gözlem yukarıda modeli verilen, iki boyutta hareket eden bir hedefin durum kestirimi UKF, Standart PF ve RBPF ile gerçekleştirilmiştir. Parçacık Filtreleri için önem dağılımı durum geçişi olarak alınmıştır: $p(x_k | x_{k-1})$

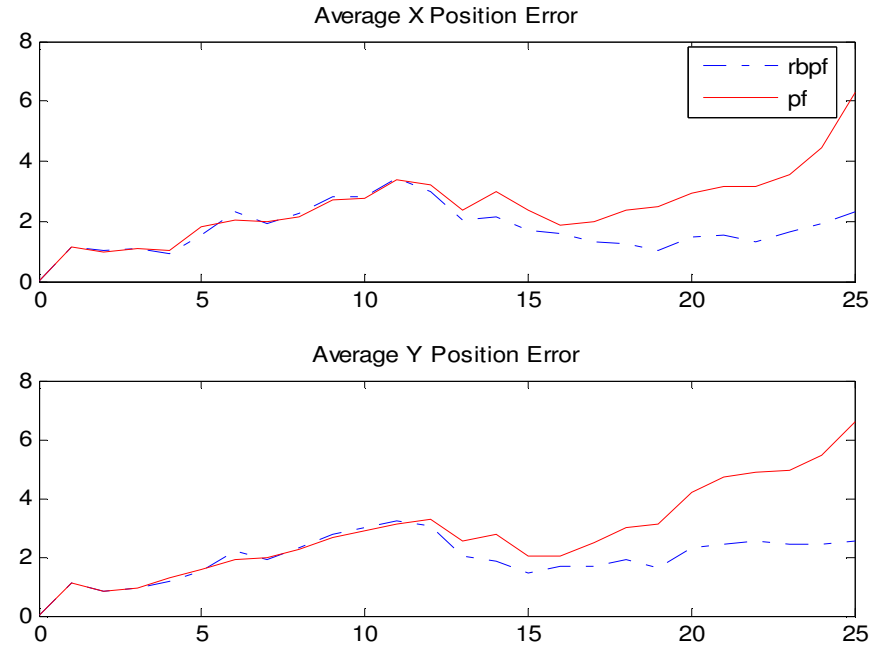


Şekil 4.2: PF ve RBPF filtrelerine ait rms hata



Şekil 4.3: PF ve RBPf Kestirim sonuçları

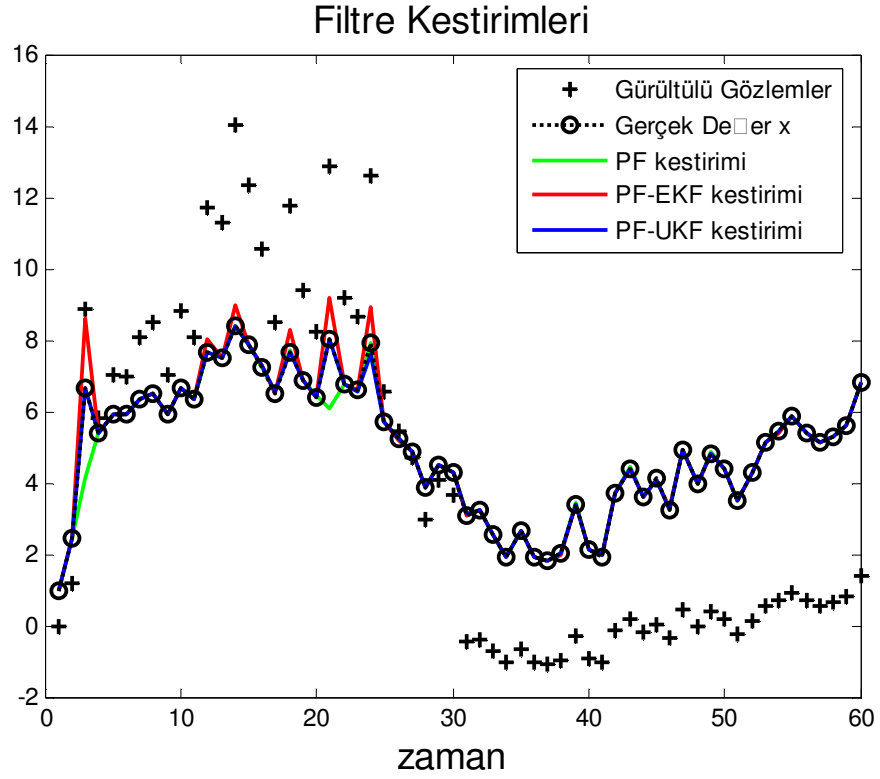
Şekil 4.3 ile verilen sonuçlar PF ve RBPf için farklı sayıda örnek kullanılarak elde edilmiştir. PF için 200 ve RBPf için 100 örnek kullanılmıştır. Parçacık sayısının artırılması işlem süresini uzatırken doğruluğu artırmaktadır. Her iki filtre için de 200 adet parçacık kullanıldığında şekil 4.4'deki sonuç alınmıştır.



Şekil 4.4 : Aynı sayıda parçacık için PF ve RBPf kestirim sonucu

4.1.3. Önem Dağılımının Etkisi

Yukarıda verilen model için durum kestirimi hataları, önem dağılımı olarak durum geçişini alan standart parçacık filtre, UKF ile elde edilen sonsal kullanan UPF ve EKF sonsalını kullanan EKF-PF filtreleri için kıyaslandı.



Şekil 4.5: PF-UKF ve PF önem dağılım sonuçları

Elde edilen karesel hatalar (RMS) :

EKF = 0.48747

UKF = 0.40288

PF = 0.41071

PF-EKF = 0.3387

PF-UKF = 0.044613

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Ele alınan hedef takibi probleminde farklı senaryolar altında parçacık filtrelerinin performansları karşılaştırılmıştır.

Analiz edecek parçacıkların sayısını düşürülerek parçacık filtrenin hesapsal yükü azaltabilir ve daha kısa sürede sonuca ulaşılabilir. Parçacık filtresi esas itibariyle parçacıkları özel bir noktada birleştirerek tek parçacık haline getirir ve bu tek parçayı oluşturan parçacık sayısını yansıtacak şekilde, oluşturulan bu parçaya ağırlık verir. Bu işlem dağılımında bir eğilme olmadan gereksiz işlemleri eler. Parçacık filtresi bunu, sistemden N tane parçacık örnekleyerek ve daha sonra önem ağırlığı oluşturmak için bu parçacıkları birbiri ile karşılaştırarak sağlar. Ağırlıkları normalize ettikten sonra, sistemden bu ağırlıkları kullanarak yeniden N tane parça örnekler. Bu süreç sayesinde örneklenecek parçacık sayısı kayda değer bir şekilde azalarak hesapsal yoğunluk azaltılmış olur. Buna ek olarak izlenebilecek bir yol herbir parçacığın karmaşıklığı azaltılarak işlem yükü azaltmaktır. Erim bilgisiyle konum ve hız kestirimi yaptığımız (4.8-4.10) denklemleri ile verilen modelde hedefin dinamik durumu doğrusal olarak değişirken, erim bilgisi alınan gözlem modeli doğrusal olmayan bir bağımlılık içerir. Parçacık filtresi eşitlikleri ise daha genel bir durum için, her iki modelinde doğrusal olmaması, oluşturulmuştur. Bu problem için RBPF (Rao-Blackwellised Parçacık Filtre) kullanarak gerekli örnek sayısı azaltılabileceği öngörülmüştür. Nitekim RBPF kullanılarak; örneklenerek hesaplanması gereken değişkenler ile örneklemeye gerek duymayanlar ayırt edilerek değişken boyutu azaltılmıştır. Bu optimizasyon sayesinde karesel hata maliyeti için Rao-Blackwell parçacık filtreyle standart parçacık filtreye kıyasla daha iyi sonuç elde edilmiştir. Böylelikle sistem karmaşıklığını azaltarak daha hızlı hedef takibi yapılabilmesi olanaklı kılınmıştır.

Ayrıca literatürde hedef takibi problemlerinde uygulanan standart parçacık filtre veya diğer parçacık filtreleri ile elde edilen performanstan daha iyi bir performans, parçacık filtresindeki önem dağılımı seçimi değiştirilerek elde edilmiştir. Yaygın olarak

kullanılan önem dağılımı olan durum geçiş olasılığı yerine EKF ve UKF filtreleri ile oluşturulan yaklaşık dağılımlar önem dağılımı olarak alınmış ve böylece kestirim hatasında önemli bir düşüş olduğu gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

ARULAMPALAM, S., MASKELL, S.R., GORDON, 2002, A tutorial on Particle Filters for On-line Nonlinear/Non- Gaussian Bayesian Tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No.2.

BERGMANN, N., 1999, *Recursive Bayesian Estimation: Navigation and Tracking Applications*, Thesis (PhD), Linkoping University.

BERNARDO, M., SMITH, A.F.M., 1994, *Bayesian theory*, John Wiley&Sons, New York, 0-471-92416-4.

DEL MORAL, P., 1996, Non-Linear Filtering: Interacting Particle Solution, *Markov Processes and Related Fields*, Vol. 41, No.4, 555-580.

DEL MORAL, P., 1998, Measure Valued Processes and Interacting Particle Systems: Application to Nonlinear Filtering Problems, *Annals of Applied Probability*, Vol. 8, No.2, 438-495.

DOUCET, A., GODSILL, S., ANDRIEU, C., 2000, On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering, *Statistics and Computing*, 10 (3), 197-208.

DOUCET, A., DE FREITAS, N., GORDON, N.J., 2001, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, United States of America, 0-387-95146-6.

GABRIELLE, A., ROCCA, L., 2007, A Novel Approach for Adaptive Bayesian Prior Selection in ill-conditioned Measurement Problems, *Instrumentation and measurement Technology Conference IEEE*, 1-3 May Warsaw-Poland.

GELMAN, A., CARLIN, J.B., STERN, H.S., RUBIN, D.B., 1995, *Bayesian Data Analysis*, Chapman&Hall, London, 0-412-03991-5.

GILKS, W.R., RICHARDSON, S., 1995, *Markov Chain Monte Carlo Methods In Practice*, Chapman&Hall, London, 0-412-05551-1.

GORDON, N., SALMOND, D., SMITH, A.F.M., 1993, Novel Approach to Nonlinear and Non-Gaussian Bayesian State Estimation, *IEEE Proceeding-F*, Vol. 140, 107-113.

KAY, S.M., 1993, *Fundamentals of Statistical Processing Volume 1: Estimation Theory*, Prentice Hall, London, 0-13-345711-7.

KITAGAWA, G., 1996, Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5(1), 1-25.

LINDLEY D.V., 1973, Bayesian Statistics - A Review, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 68, 235-237.

LIU, J.S., CHEN, R., 1998, Sequential Monte Carlo Methods for Dynamical Systems, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, 1032-1044.

MACCORMICK, J., BLAKE, A., 2000, A Probabilistic Exclusion Principle for Tracking Moving Objects, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 39, No.1, 57-71.

RUANADIH, J.J.K., FITZGERALD, W.J., 1996, *Numerical Bayesian Methods Applied Signal Processing*, Springer, New York, 0-387-94629-2.

SCHÖN, B. T., 2003, *On Computational Methods for Non-Linear Estimation*, Licentiate Thesis, Linköping Studies in Science and Technology.

VAN DER MERWE, R., DOUCET, A., FREITAS, J.F.G., WAN, E., 2001, The Unscented Particle Filter, *In Advances in Neural Information Processing Systems 13*. MIT Press.

ÖZGEÇMİŞ

Azime Can 26.11.1982 yılında Balıkesir’de doğdu. Ortaöğrenimini Nurullah Koyuncuoğlu Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2000 yılında Adem Tolunay Fen Lisesi’nden mezun olduktan sonra, aynı yıl İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2005 yılında lisans öğrenimini tamamladıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği yüksek lisans programına kabul edildi. 2006 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektromagnetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır.