



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇALIŞAN
BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ
VE
DÜZLEM GERİLME – DÜZLEM DEFORMASYON
PROBLEMLERİNİN ANALİZİ**

**İnş. Müh. Hatice GAZİ
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Programı**

**Danışman
Prof. Dr. Namık Kemal ÖZTORUN**

Ocak, 2008

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇALIŞAN
BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ
VE
DÜZLEM GERİLME – DÜZLEM DEFORMASYON
PROBLEMLERİNİN ANALİZİ**

**İnş. Müh. Hatice GAZİ
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Programı**

**Danışman
Prof. Dr. Namık Kemal ÖZTORUN**

Ocak, 2008

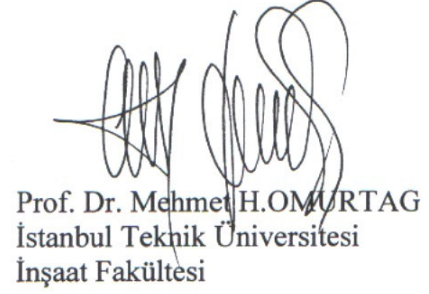
İSTANBUL

Bu çalışma 31/01/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Prof. Dr. N. Kemal ÖZTORUN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG
İstanbul Teknik Üniversitesi
İnşaat Fakültesi



Prof. Dr. Feyza ÇINICIOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Haluk ÇEÇEN
Yıldız Teknik Üniversitesi
İnşaat Fakültesi



Yrd. Doç. Dr. Cenk ALHAN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. Namık Kemal ÖZTORUN'a, görüş, tavsiye ve kaynak yardımlarıyla mevcut çalışmaya değerli katkılarda bulunan Sayın Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Cenk ALHAN'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Ayrıca lisans, yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Araş. Gör. Erdem DAMCI ile yine görüş, öneri ve tavsiyeleriyle mevcut çalışmaya önemli katkıları bulunan Araş. Gör. Kemal ÇELİK, İnş. Yük. Müh. Yusuf Ziya ALP, Araş. Gör. Rasim TEMUR, Araş. Gör. Barış SAYIN, Araş. Gör. Ömer GİRAN, Araş. Gör. Cihan ÖSER ve Araş. Gör. Özlem ÜSTÜNDAĞ başta olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma gösterdikleri ilgi, anlayış ve hoşgörü dolayısıyla teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak, 2008

Hatice GAZİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ŞEKİL LİSTESİ	IV
TABLO LİSTESİ.....	V
SEMBOL LİSTESİ.....	VI
ÖZET	VIII
SUMMARY.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	4
2.1. DÜZLEM GERİLME HALİ.....	4
2.1.1. Düzlem Gerilme Haline Ait Temel Denklemler.....	6
2.1.1.1. Dengenin Diferansiyel Denklemleri.....	6
2.1.1.2. Bünye Bağlılıkları.....	7
2.1.1.3. Yer Değiştirme – Birim Şekil Değiştirme Bağlılıkları	8
2.1.2. Düzlem Gerilme Haline Ait Uygunluk Denklemleri	8
2.1.3. Düzlem Gerilme Haline Ait Sınır Şartları	9
2.2. DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ	10
2.2.1. Düzlem Şekil Değiştirme Haline Ait Temel Denklemler.....	12
2.2.2. Düzlem Şekil Değiştirme Haline Ait Uygunluk Denklemleri	13
2.3. AIRY GERİLME FONKSİYONU	14
2.4. DÜZLEM ELASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	15
2.4.1. Ters Yöntem.....	16
2.4.2. Yarı Ters Yöntem.....	16
2.4.3. Düz veya Direkt Yöntem.....	17
2.4.4. Deneysel Yöntemler.....	17
2.4.5. Enerji Yöntemi	18
2.4.6. Nümerik Yöntemler	18

2.5. KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	23
3. MALZEME VE YÖNTEM	27
3.1. DOĞRUSAL ÜÇGEN ELEMAN FORMÜLASYONU.....	27
3.1.1. Yer Değiştirme Fonksiyonlarının Seçilmesi.....	29
3.1.2. Yer Değiştirme – Birim Şekil Değiştirme İlişkisinin Kurulması.....	34
3.1.3. Gerilme – Birim Şekil Değiştirme İlişkisinin Kurulması.....	35
3.1.4. Potansiyel Enerji Prensipleri Yardımıyla Denge Denklemlerinin Eldesi.....	36
3.2. BİLGİSAYAR PROGRAMI.....	38
3.2.1. Data Dosyası.....	40
3.2.2. Programın İşleyişi	42
3.2.2.1. Data Dosyasındaki Verilerin Okunması	42
3.2.2.2. Sistem Band Genişliğinin Hesaplanması	42
3.2.2.3. Eleman Rijitlik Matrislerinin Hesaplanması.....	43
3.2.2.4. Sistem Rijitlik Matrisi Oluşturulması ve Evriğinin Hesaplanması.....	44
3.2.2.5. Sistem Yük Vektörünün Oluşturulması.....	46
3.2.2.6. Yer Değiştirme Bilinmeyenlerinin Hesaplanması	46
3.2.2.7. Eleman İç Kuvvetlerinin Hesaplanması.....	47
3.3.3. Programın Sonuç Dosyaları	48
4. BULGULAR.....	50
4.1. ÖRNEK 1: DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ BİR İNCE LEVHA	50
4.2. ÖRNEK 2: TEKİL YÜK ETKİSİNDEKİ BİR KONSOL KİRİŞ.....	53
4.3. ÖRNEK 3: DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ DELİKLİ İNCE LEVHA	56
4.4. ÖRNEK 4: ZATİ YÜKLER ETKİSİNDEKİ BİR TÜNEL – ZEMİN SİSTEMİ	63
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	71
KAYNAKLAR.....	74
EKLER.....	77
EK – 1.....	77
EK – 2.....	79
EK – 2A.....	81
EK – 3.....	81
EK – 3A.....	84
EK – 4.....	84
ÖZGEÇMİŞ.....	85

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	: Düzlem gerilme hali, gerilme ve şekil değiştirme tansörleri	4
Şekil 2.2	: Dengenin diferansiyel denklemleri.....	7
Şekil 2.3	: Sınır şartları	9
Şekil 2.4	: Düzlem şekil değiştirme hali, şekil değiştirme ve gerilme tansörleri.....	11
Şekil 3.1	: Doğrusal üçgen eleman.....	29
Şekil 3.2	: Doğrusal üçgen elemanlara ait şekil fonksiyonları	32
Şekil 3.3	: Programın akış şeması	38
Şekil 3.4	: Yarım band genişliği.....	42
Şekil 4.1.a	: Düzgün yayılı yük etkisindeki ince levha.....	49
Şekil 4.1.b	: Matematik model ve düğüm noktası yer değiştirme bileşenlerinin analitik değerleri (cm)	50
Şekil 4.1.c	: Örnek 1’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan model	50
Şekil 4.2.a	: Uç noktasından etkileyen düzlem içi tekil yük etkisindeki konsol kiriş	52
Şekil 4.2.b	: Örnek 2 için Cook tarafından çözülen bazı sonlu eleman modelleri.....	53
Şekil 4.2.c	: Örnek 2’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan 1. model	53
Şekil 4.2.d	: Örnek 2’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan son model.....	54
Şekil 4.3.a	: Düzlemi içerisindeki düzgün yayılı yük etkisindeki delikli ince levha....	55
Şekil 4.3.b	: Düzlemi içinde düzgün yayılı yük etkisindeki delikli levhada gerilmeler	56
Şekil 4.3.c	: Örnek 3’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan 1. model	57
Şekil 4.3.d	: Örnek 3’e ait 1. modelde AB hattı boyunca σ_x .h/q değişimi.....	58
Şekil 4.3.e	: Örnek 3’e ait 1. modelde AB hattı boyunca σ_y .h/q değişimi.....	58
Şekil 4.3.f	: Örnek 3’e ait 1. modelde CD hattı boyunca σ_x .h/q değişimi.....	58
Şekil 4.3.g	: Örnek 3’e ait 1. modelde CD hattı boyunca σ_y .h/q değişimi.....	58
Şekil 4.3.h	: Örnek 3’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan son model.....	59
Şekil 4.3.i	: Örnek 3’e ait son modelde AB hattı boyunca σ_x .h/q değişimi	60
Şekil 4.3.j	: Örnek 3’e ait son modelde AB hattı boyunca σ_y .h/q değişimi	60
Şekil 4.3.k	: Örnek 3’e ait son modelde CD hattı boyunca σ_x .h/q değişimi	60
Şekil 4.3.l	: Örnek 3’e ait son modelde CD hattı boyunca σ_y .h/q değişimi	60
Şekil 4.4.a	: Tünel – zemin sisteminin dikkate alınan kısmı	63
Şekil 4.4.b	: Simetri nedeniyle analizi yapılan yarım sistem.....	63
Şekil 4.4.c	: Analizi yapılan yarım sistem için kurulan sonlu eleman modeli	64
Şekil 4.4.d	: Tünel kesidine ait düğüm noktası numaraları	65
Şekil 4.4.e	: Tünel kesidine ait eleman numaraları.....	65
Şekil 4.4.f	: Tünel kesidine ait bazı elemanlarda oluşan asal gerilmeler.....	67

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 : İki boyutlu sürekli ortam modellerinde kullanılacak eleman tipleri...	20
Tablo 4.1.a : Örnek 1'e ait malzeme ve en kesit özellikleri	49
Tablo 4.1.b : Örnek 1'e ait bazı düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri.....	51
Tablo 4.1.c : Örnek 1'e ait bazı eleman gerilme değerleri	51
Tablo 4.2.a : Örnek 2'ye ait malzeme ve en kesit özellikleri	52
Tablo 4.2.b : Örnek 2'ye ait 1.model için CST ve SAP2000 ile elde edilen değerler ...	53
Tablo 4.2.c : Örnek 2'ye ait son model için CST ve SAP2000 ile elde edilen değerler	54
Tablo 4.3.a : Örnek 3'e ait malzeme ve en kesit özellikleri	55
Tablo 4.3.b : Örnek 3'e ait 1.model için CST ile elde edilen bazı gerilme değerleri	57
Tablo 4.3.c : Örnek 3'e ait son model için CST ile elde edilen bazı gerilme değerleri .	59
Tablo 4.4.a : Örnek 4'e ait malzeme ve en kesit özellikleri	64
Tablo 4.4.b : Örnek 4'e ait bazı düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri.....	66
Tablo 4.4.c : Örnek 4'e ait bazı elemanlarda oluşan gerilme değerleri	66

SEMBOL LİSTESİ

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: normal gerilme bileşenleri
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: kayma gerilmesi bileşenleri
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: doğrusal birim şekil değiştirme bileşenleri
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: açısız birim şekil değiştirme bileşenleri
 $[G_{2g}]$: düzlem gerilme haline ait gerilme tansörü
 $[D_{2g}]$: düzlem gerilme haline ait şekil değiştirme tansörü
 $[G_{2d}]$: düzlem şekil değiştirme haline ait gerilme tansörü
 $[D_{2d}]$: düzlem şekil değiştirme haline ait şekil değiştirme tansörü
 h : levha kalınlığı
 d_x, d_y, d_z : diferansiyel elemanın boyutları
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: levhanın boyutları
 X, Y : birim hacime etkiyen kütle kuvveti bileşenleri
 q_x, q_y, q_z : yüzey kuvveti bileşenleri
 ρ : birim hacim kütlesi
 g : yerçekimi ivmesi
 E : elastisite modülü
 G : kayma modülü
 ν : poisson oranı
 u, v, w : doğrusal yer değiştirme bileşenleri
 $\Phi(x,y)$: Airy gerilme fonksiyonu
 Π : sistemin sahip olduğu toplam potansiyel enerji
 Π_e : elemanın sahip olduğu toplam potansiyel enerji
 U_e : elemanın sahip olduğu şekil değiştirme enerjisi
 W_e : elemana etkiyen dış kuvvetin yaptığı iş
 P_i : i düğüm noktasına etkiyen harici tekil kuvvet
 Δ_i : i düğüm noktasındaki yer değiştirme
 n : sistemdeki mevcut eleman sayısı
 m : sistemdeki mevcut düğüm noktası sayısı
 u_i, v_i : i düğüm noktasındaki yer değiştirme bileşenleri
 x_i, y_i : i düğüm noktasının koordinatları
 $\{\Delta\}$: sistemin yer değiştirme bilinmeyenleri vektörü
 $u(x,y), v(x,y)$: elemanın yer değiştirme fonksiyonları
 α_i : düğüm noktalarının koordinatlarına ve yer değiştirme bil. bağlı st. sayılar
 $\{\alpha\}_x, \{\alpha\}_y$: α sabitlerini içeren vektörler
 $\{d_{ex}\}, \{d_{ey}\}$: elemanın x ve y doğrultusundaki yer değiştirme bil. içeren vektörler
 A : üçgen elemanın yüzey alanı
 $N_i = N_i(x,y)$: i düğüm noktasına ait şekil fonksiyonu
 $[N(x,y)]$: şekil fonksiyonları matrisi
 $[N]^T$: $[N(x,y)]$ matrisinin transpozisi
 $\{U(x,y)\}$: yer değiştirme fonksiyonları vektörü

$\{\bar{U}\}^T$: $\{\bar{U}(x,y)\}$ vektörünün transpozesi
$\{d_e\}$: elemanın düğüm noktası yer değiştirme vektörü
$\{d_e\}^T$: $\{d_e\}$ vektörünün transpozesi
$\{\varepsilon\}$: birim şekil değiştirme vektörü
$\{\varepsilon\}^T$: $\{\varepsilon\}$ vektörünün transpozesi
$[C]$: diferansiyel operatörler matrisi
$[B]$: şekil fonksiyonlarının birinci değişim terimleri matrisi
$[B]^T$: $[B]$ matrisinin transpozesi
$[D]$: elastisite matrisi
$\{\sigma\}$: gerilme vektörü
\bar{X}	: yüzey kuvveti
$\{\bar{X}\}$: yüzey kuvveti bileşenleri vektörü
$\{X\}$: kütle kuvveti bileşenleri vektörü
$[K_e]$: eleman rijitlik matrisi
$[f_e]$: eleman yük vektörü
$[K_{sg}]$: global koordinatlardaki sistem rijitlik matrisi
$[K_{sg}]^{-1}$: $[K_{sg}]$ matrisinin evriği
$[K_{el}]$: lokal koordinatlardaki eleman rijitlik matrisi
$\{P_{sg}\}$: global koordinatlardaki sistem yük vektörü
$\{P_{el}\}$: lokal koordinatlardaki eleman yük vektörü
$\{\Delta_{sg}\}$: global koordinatlardaki sistem yer değiştirme vektörü
$\{\Delta_{eg}\}$: global koordinatlardaki eleman yer değiştirme vektörü
$\{\Delta_{el}\}$: lokal koordinatlardaki eleman yer değiştirme vektörü
$[R]$: eleman rotasyon matrisi
$[R]^T$: $[R]$ matrisinin transpozesi
NBAND	: sistemin yarım band genişliği
MF	: herhangi bir elemanın serbestlik numaralarındaki maksimum fark
IJ(K)	: serbestlik numaraları dizisi
B	: $[B]$ matrisi terimlerini içeren dizi
D	: $[D]$ matrisi terimlerini içeren dizi
BT	: $[B]^T$ matrisi terimlerini içeren dizi
LTUR	: üçgen elemanların türünü belirleyen değişken
SE	: eleman rijitlik terimlerini içeren dizi
ST	: sistem rijitlik terimlerini içeren dizi
NDEPRE	: sistemin toplam serbestlik sayısı
KKK	: sistemin tutulu serbestliklerinin sayısı
III	: sistemin serbestlik derecesi (bilinmeyen serbestliklerinin sayısı)
BKARE	: sınır şartları tanımlanmamış sistem rijitlik matrisi
AKARE	: sınır şartları tanımlanmış sistem rijitlik matrisi (/ evriği)
NYUKLU	: yüklü nokta numaralarını içeren dizi
R	: nokta yükü bileşen değerlerini içeren dizi
YUKVEK	: sistem yük vektörü (/ yer değiştirme vektörü) bileşenlerini içeren dizi
YKISA	: sistemin sadece bilinmeyen yer değ. bil. karşı gelen yük bil. içeren dizi
DKISA	: sistemin sadece bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerini içeren dizi
UG	: $\{\Delta_{eg}\}$ vektörü terimlerini içeren dizi
σ_0	: levhaya uygulanan çekme gerilmesi
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$: kutupsal koordinatlarda (r, θ) düzlemindeki gerilme bileşenleri
a	: delik yarıçapı
r	: levha üzerindeki bir noktanın delik merkezine uzaklığı

ÖZET

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇALIŞAN BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ VE DÜZLEM GERİLME – DÜZLEM DEFORMASYON PROBLEMLERİNİN ANALİZİ

Bu çalışmada düzlem elastisite teorisine konu teşkil eden ve “düzlem elastisite problemleri” olarak adlandırılan düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme problemleri incelenmiştir. Çalışmanın amacı, düzlem elastisite problemlerinin bilgisayar ortamında analizini yapabilecek modüllerin Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) ile çalışan bir bilgisayar programında oluşturulmasıdır. Bu amaç doğrultusunda, FORTRAN programlama dili ile kodlanmış ve FEM ile çalışan TUNAL [1] programından yararlanılmıştır. Çalışma kapsamında incelenen problemlerin analizi için kurulan sonlu eleman modellerinde her düğüm noktasında iki doğrusal yer değiştirme serbestliği bulunabilen, üç köşe düğüm noktasına sahip doğrusal üçgen elemanlar kullanılmıştır. Mevcut çalışmada bu elemanların formülasyonuna göre analiz yapabilecek modüller, kaynak programın hali hazırda kafes ve / veya çerçeve tipi elemanlardan oluşan sistemlerin iki boyutlu analizini doğrusal – elastik sınırlar içinde gerçekleştiren bölümünde oluşturulmuştur. Programda oluşturulan bu modüllerin doğruluğunu test etmek amacıyla, incelenen problemler için kurulan sonlu eleman modelleri SAP2000 (Ver. 9.0.3) programı ile de analiz edilmiş ve iki programın sonuçları karşılaştırılmıştır. Ayrıca her iki programdan elde edilen nümerik çözüm sonuçları, bu problemler için literatürde verilen analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılarak sonlu eleman analizlerinde kullanılan doğrusal üçgen elemanların kullanım alanları ve yeterliliği sorgulanmıştır.

SUMMARY

DEVELOPING A COMPUTER PROGRAM BASED ON FINITE ELEMENT METHOD AND ANALYSIS OF PLANE STRESS – PLANE STRAIN PROBLEMS

In this study plane stress and plane strain problems, which are the subjects of plane elasticity theory and named as “plane elasticity problems” were examined. The objective of this study is to form the subroutines, which can analyze plane elasticity problems in a part of a computer program based on Finite Element Method (FEM). In order to achieve this aim, a computer program TUNAL [1] written in FORTRAN and using FEM was used. Linear triangle finite elements with two linear degrees of freedom at each node and with three corner nodes were used in finite element models formed for the examined problems in the scope of the study. The subroutines, which can analyze in accordance with the formulation of these elements were created in a part of the existing program, which can analyze structural systems consisting of two dimensional truss and / or frame elements within the limits of linear – elastic behavior. In order to verify the subroutines, finite element models formed for the problems were also analyzed with the computer program SAP2000 (Ver. 9.0.3) and the results obtained from these programs were compared. Furthermore, application fields and sufficiency of the linear triangle finite elements used for the finite element analyses were examined by comparing the numerical results obtained from the two programs with the analytical solution results given for these problems.

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında, gerçekte hiçbir yapı elemanı iki boyutlu olmamasına rağmen; bu yapı elemanlarının oluşturduğu taşıyıcı sistemlerin analizi, bazı kabullerin yapılabilmesi durumunda iki boyutlu modeller kullanılarak gerçekleştirilir. Bu tür, idealizasyonların yapılabilirdiği pek çok problemin iki boyutlu analizi ile sistemin gerçek davranışını kabul edilebilir bir yaklaşıklıkla yansıtan ve de genellikle üç boyutlu analize nazaran daha etkili olan sonuçlar elde edilir. Tez kapsamında incelenen problemleri konu edinen düzlemsel elastisite teorisinde de, bu tür yaklaşımlar yapılmakta ve gerçekte üç boyutlu elastisite teorisine incelenmesi gereken bir problemin analizi iki boyutlu olarak yapılmaktadır.

Düzlemsel elastisite teorisine konu teşkil eden “düzlemsel elastisite problemleri” veya “iki boyutlu elastisite problemleri” olarak adlandırılan problemler, bilinmeyenleri olan gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerinin, sisteme ait koordinat takımındaki bir eksene (ki bu eksen genelde kalınlık doğrultusunda alınan z eksenidir) bağlı olmadığı problemlerdir. Yani bu tip problemlerin gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri, gerek kartezyen gerekse silindirik koordinat takımında z eksenine paralel doğrultuda hiç değişim göstermezler. Alt indislerinden biri z olan açısız şekil değiştirme bileşenlerinin sıfır olması koşulunu da yukarıdaki tanıma ekleyecek olursak; düzlem elastisite problemlerinde şekil değiştirmeden önce z eksenine paralel olan her doğru şekil değiştirmeden sonra da z eksenine paralel kalmaktadır [2].

Bu problemlerin iki türü vardır ve bu iki tür problem için dış yüklemeler özel olarak alınır, denklemleri birbirine çok benzer. Eğer bir ince levha, sınırından ve levha düzlemi içinde uygulanmış kuvvetlerin etkisinde ise; σ_z , τ_{xz} ve τ_{yz} gerilme bileşenleri levhanın her iki yüzünde sıfıra eşitlenir ve bu bileşenlerin levhanın tüm kalınlığı boyunca yok olduğu çok fazla bir hata olmaksızın varsayılabilir (Şekil 2.1). Bu şekilde düzlem gerilme problemleri elde edilmektedir. İki boyutlu problemlerin bir diğer türü

ise uzun silindirik veya prizmatik bir cisim, şiddeti silindirin uzunluğu boyunca değişmeyen yayılı yüklerle yüklendiğinde ortaya çıkar (Şekil 2.4). Böyle bir sistemde, uçlardan oldukça uzakta bulunan cisim parçasında düzlem şekil değiştirme gerçekleşir, yani şekil değiştirme boyunca meydana gelen yer değiştirmeler, silindirin eksenine (z eksenini olarak alabileceğimiz) dik düzlemler içinde gerçekleşir. Böyle bir durumda birim şekil değiştirme bileşenleri $\varepsilon_z, \gamma_{xz}$ ve γ_{yz} sıfıra eşitlenir ve $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} şeklinde sadece üç birim şekil değiştirme bileşeni dikkate alınır. Bu tür problemler ise, düzlem şekil değiştirme problemi olarak tanımlanmaktadır [3].

Genel hatları ile bu şekilde tanımlanan düzlem elastisite problemlerinin çözümlenebilmesi için kullanılan belli başlı yöntemler, “Ters Yöntem”, “Yarı Ters Yöntem”, “Düz veya Direkt Yöntem” gibi “diferansiyel denklem yolları” olarak da adlandırılan analitik çözüm yöntemleri ile “Deneysel Yöntemler”, “Enerji Yöntemleri” ve “Nümerik Yöntemler” gibi yaklaşık çözüm yöntemleridir. Ayrıca matematiksel teknikler olarak sınıflandırılabilen, “Potansiyel Fonksiyon Yöntemi”, “Uygun Koordinat Takımının Kullanılması”, “Betti Çözüm Yönteminin Kullanılması”, “İntegral Dönüşümlerinin Kullanılması”, “Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarının Kullanılması” ve “İntegral Denklemlerinin Kullanılması” gibi çözüm teknikleri de bulunmaktadır.

Bu tür problemlerde olduğu gibi yapı mekaniğinde herhangi bir problemin kesin çözümü için, bilinen elemanter yöntemler kullanılarak o probleme uygun diferansiyel denklem çıkarılır. Bundan sonra, problemde mesnetler v.b. sınır şartları da dikkate alınarak, bu diferansiyel denklemin çözümü matematiksel olarak yapılır [4]. Analitik çözüm yöntemleri, idealde istenen ve doğru sonuç veren kesin çözüm yöntemleridir. Ancak yapı mekaniğinde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin kesin çözümü, bazı koşullar gerçekleştiği takdirde yapılabilmektedir. Örneğin yük dağılımı ve sınır şartları gibi parametreler matematiksel olarak kolayca ifade edilebiliyorsa; diferansiyel denklemin tam ve kesin çözümü yapılabilir. Buna karşılık, bu koşulların karışık olduğu durumlarda çözüm zorlaşmakta ve hatta bazen kesin çözüm bulmak mümkün olmamaktadır. Ayrıca bir problemin, belirli yükleme ve sınır şartları altında kesin çözümü yapılsa bile, yük durumu ve sınır şartları değiştiğinde problemi yeniden çözmek gerekecektir. Bütün bu zorluklar, nümerik yöntemlerin önem kazanmasına sebep olmuştur [4].

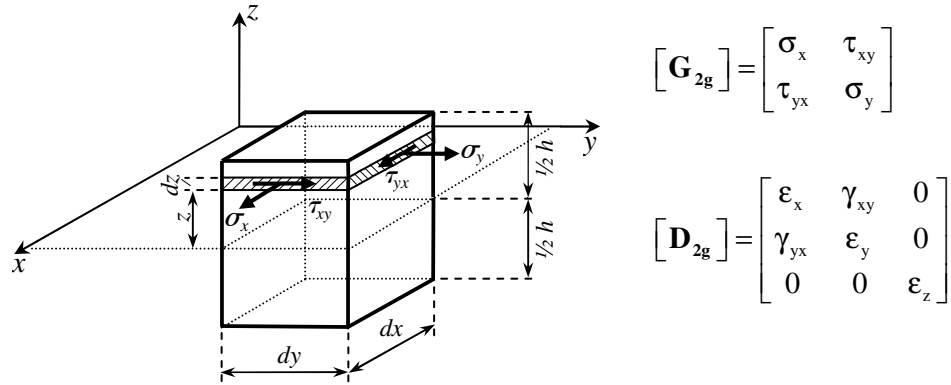
Çünkü nümerik yöntemler kullanılarak, tekrarlamalı ve karmaşık problemler kabul edilebilir bir yaklaşıklıkla, hızlı ve işlem hatası yapmadan çözülebilir. Nümerik yöntemlerin bu özelliği, yaklaşık çözüm yöntemleri olmalarının getirdiği sakıncayı ortadan kaldırmaktadır. Bu nedenle bu çözüm yöntemleri, son yıllarda bilgisayar teknolojisinin gelişimine paralel olarak ileri düzeyde mühendislik problemlerinin bilgisayar yardımıyla çözülmesinde sıkça tercih edilir olmuştur. Bu nedenler dolayısıyla, mevcut tez çalışmasında nümerik yöntemlerden Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) kullanılmıştır. İncelenen düzlem elastisite problemlerinin analizi, FEM ile yapılmıştır. Bu doğrultuda tez çalışması kapsamında, her düğüm noktasında maksimum iki doğrusal yer değiştirme bileşeninin bulunabileceği, köşe noktalarındaki üç düğüm noktasına sahip doğrusal üçgen elemanların formülasyonuna göre söz konusu problemlerin bilgisayar ortamında analizini yapabilecek modüller, FEM ile çalışan bir bilgisayar programında oluşturulmuştur. Modüllerin doğruluğunu test amacıyla dört adet düzlem elastisite problemi, SAP2000 (Ver. 9.0.3) ile de analiz edilmiş ve ayrıca bu iki programdan elde edilen yaklaşık çözüm sonuçları, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Mevcut çalışmanın 2. Bölüm'ünde "Genel Kısımlar" başlığı altında, düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme halleri tanımlanarak; bu düzlemsel hallerin meydana geldiği problemlerde dikkate alınan büyüklüklerin sağlanması gereken denklemler belirtilmiş ve bu problemlerin genel çözüm yöntemleri ile mevcut çalışmada kullanılan çözüm yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. 3. Bölüm'de "Doğrusal Üçgen Eleman Formülasyonu" başlığı altında problemlerin sonlu eleman analizi için kullanılan eleman tipine ait formülasyon ve "Bilgisayar Programı" başlığı altında da bu sonlu elemanların formülasyonuna göre analiz yapan modüllerin oluşturulduğu kaynak bilgisayar programının tez çalışması kapsamındaki haline ait detaylar verilmiştir. Çalışmanın 4. Bölüm'ünde "Bulgular" başlığı altında ise, modüllerin doğruluğunu test etmek amacıyla analiz edilen dört adet düzlem elastisite problemi için elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. DÜZLEM GERİLME HALİ

Dış kuvvetlerin etkisinde bulunan bir cismin herhangi bir noktasından geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilme vektörleri, aynı bir düzleme paralel ise bu gerilme hali, iki eksenli veya düzlem gerilme hali olarak tanımlanır [5]. Düzlem gerilme halinin gerçekleştiği yapı elemanları, düzlemi içerisinde yüklü ve kalınlığı diğer boyutlarına nazaran çok küçük olan ince levha tipi elemanlardır. Bu nedenle düzlem gerilme problemleri literatürde “ince levha problemleri” olarak da adlandırılır.



Şekil 2.1 Düzlem gerilme hali [6], gerilme ve şekil değiştirme tansörleri

Şekil 2.1’de görülen levha noktaları, (x, y) düzlemi levhanın orta düzlemiyle çakışan bir dik x, y, z koordinat eksen takımına göre verilmektedir [6]. Levha, sınırından, orta düzlemine paralel, kalınlık boyunca düzgün yayılmış bulunan [7] ve kendi arasında dengede olan bir takım kenar kuvvetleriyle yüklenmektedir. Eğer, $z = \pm 1/2h$ sınır yüzlerinde dış kuvvet yoksa bu halde buralarda σ_z , τ_{zx} ve τ_{zy} gerilme bileşenleri, sıfır olmak zorundadır. Levha kalınlığı h, çok küçük ve kütle kuvvetleri de levha düzlemine paralel ise; bu takdirde yukarıda belirtilen gerilme bileşenlerinin levha içinde de ihmal edilebilecek kadar küçük kaldığı kabul edilebilir [6]. Buna göre, böyle bir levhanın her noktası için Denklem 2.1’deki eşitlik yazılabilir ve yine her noktadaki gerilme hali,

yalnız σ_x, σ_y ve τ_{xy} bileşenleri ile tayin edilir. Bu suretle, düzlem gerilme hali elde edilmiş olur.

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (2.1)$$

Bir düzlemsel gerilme probleminde, herhangi bir nokta için σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin bilinmesi durumunda; bu noktadan geçen bütün yüzey elemanlarındaki gerilmeler, bilinen gerilmeler cinsinden elde edilebilir. Yani düzlem gerilme hali için, σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenlerinin bilinmesi yeterlidir. Bu nedenle en genel durum için $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ve τ_{zy} şeklindeki altısı bağımsız dokuz bileşenin oluşturduğu 3×3 'lük simetrik, kare matris formundaki gerilme tansörü, bu gerilme halinde Şekil 2.1'deki halini alır. Söz konusu noktadan geçen diğer yüzey elemanlarındaki gerilmeler ise; nokta civarından alınmış, sonsuz küçük bir elemanın dengesinden elde edilen “dönüşüm formülleri” ile elde edilir. Dönüşüm formülleri bilindiği üzere, incelenen bir nokta civarındaki asal normal gerilmeler ve asal kayma gerilmelerine ait değer – doğrultular gibi tüm özel ve ara gerilme değer – doğrultularının hesaplanması için yeterlidir.

Denklem 2.1'den anlaşıldığı üzere, bu gerilme halinde σ_z asal gerilme ve dolayısıyla z ekseni bir asal eksendir. σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri ise, orta düzleme dik olan kesitlerde yer alır ve hepsi orta düzleme paraleldir [6]. Bu üç bileşenin de z'den bağımsız oldukları, yani kalınlık boyunca değişmedikleri kabul edilebilir. Bu bileşenler, yalnız x ve y'nin fonksiyonlarıdır [7]. Bu kabul, levhaya etkiyen kuvvetlerin kalınlık boyunca düzgün yayılı etkimesi halinde gerçekçidir.

Ancak bir düzlemsel gerilme probleminde dış kuvvetlerin, levha kalınlığına dik doğrultuda düzgün yayılı olmayıp, levha orta düzlemine göre simetrik olmaları durumunda; düzlem gerilme problemine ait temel denklemler (denge diferansiyel denklemleri, yer değiştirme – birim şekil değiştirme bağıntıları, bünye bağıntıları), gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerinin levha kalınlığı boyunca ortalama değerleri için geçerli olurlar. Bu durumda problem “genelleştirilmiş düzlem gerilme problemi”

olarak adlandırılır. Ancak bu özelliğin çözüm yöntemine herhangi bir etkisi yoktur. Çok ince levhalarda bu düzgün yayılamamanın doğuracağı fark çok küçüktür [2].

2.1.1. Düzlem Gerilme Haline Ait Temel Denklemler

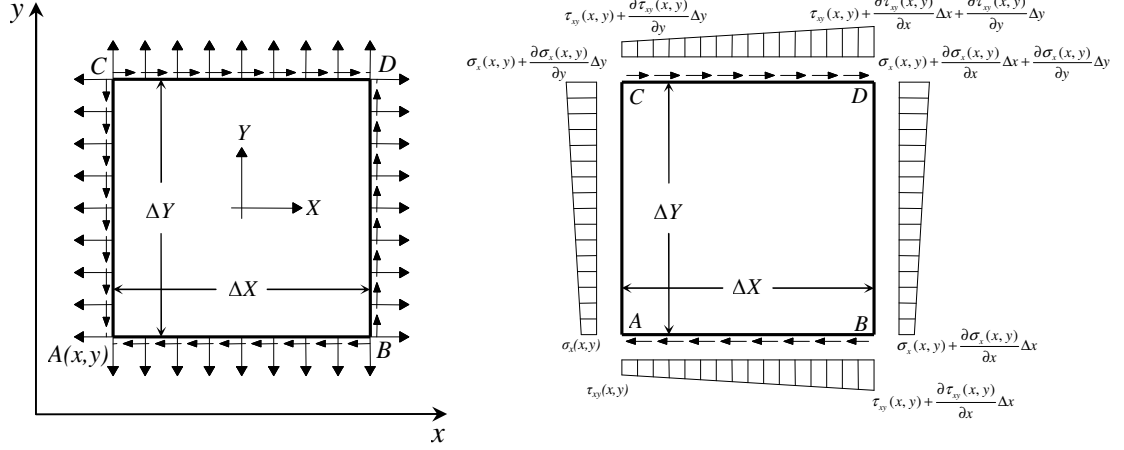
Düzlemsel elastisite problemlerinde amaç, ele alınan bir sınır değer problemini çözmektir. Bir sınır değer problemi çok basit olarak, verilen bir bölgede belirli temel denklemleri ve o bölgenin sınırlarında da verilen sınır koşullarını sağlayan fonksiyonların arandığı problemler olarak tanımlanabilir. Bu tür problemlerde, inceleme yapılan düzleme dik doğrultuda incelenen temel büyüklüklerde değişim olmadığı düşünülürse, yukarıdaki tanımda sözü geçen bölge bir düzlemin belirli bir parçası veya tümüdür. Adı geçen sınırlar ise, o bölgeyi üzerinde bulunduğu düzlemin kendisine ait olmayan kısımlarından ayıran, bir veya daha fazla kapalı eğriden oluşur [2].

Düzlemsel elastisite problemlerinde incelenen gerilme, yer değiştirme ve birim şekil değiştirme büyüklüklerinin sağlanması gereken denklemler; denge denklemleri, bünye bağıntıları ve yer değiştirme – birim şekil değiştirme bağıntıları olup; bu denklemlerin hepsine birden “temel denklemler” veya “alan denklemleri” denir.

2.1.1.1. Dengenin Diferansiyel Denklemleri

Homojen olmayan gerilme durumunda gerilmeler noktadan noktaya farklıdır. Bu durumda gerilmelerin sürekli olduğu varsayılırsa, eksenlere paralel seçilmiş bir prizmatik elemanın paralel yüzlerinde gerilmeler eşit olmaz [8]. Örneğin, Şekil 2.2’de görülen ve boyutları $\Delta x, \Delta y$ olan düzlem gerilme etkisindeki levhanın herhangi bir noktasındaki gerilme halini belirten σ_x, σ_y ve τ_{xy} değerleri, buldukları noktanın bir fonksiyonudur yani $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ ’dir. Denge esasına dayanarak bu üç fonksiyonun birbirinden bağımsız olmadığı, aksine türevleri arasında belirli ilişkiler bulunduğu gösterilebilir; işte bu bağıntılara “diferansiyel denge denklemleri” denir [9].

X ve Y birim hacme etkiyen kütle kuvvetlerini göstermek üzere; şekildeki levha, kenarlarına etkiyen yüzey kuvvetleri ve hacmine etkiyen kütle kuvvetleriyle dengededir. Elemanın dengesini ifade eden iki denklem, sırasıyla x ve y eksenleri doğrultularındaki izdüşüm denklemlerinden Denklem 2.2’deki gibi elde edilir.



Şekil 2.2 Denge için diferansiyel denklemler [9]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (2.2)$$

Pratikteki uygulamada çok kere, cismin ağırlığı yegâne kütle kuvvetidir. Bu sebeple y eksenini aşağıya doğru alıp cismin birim hacim kütleliğini ρ ve yer çekimi ivmesini g ile gösterirsek [7]; Denklem 2.2'de x eksenine doğrultusundaki X kütle kuvveti bileşeni sıfıra, y eksenine doğrultusundaki Y kütle kuvveti bileşeni ise $\rho \cdot g$ değerine eşit olur.

2.1.1.2. Bünye Bağlılıkları

Tez genelinde hesaplar, malzemenin hooke cismi davranışı gösterdiği doğrusal – elastik sınırlar içinde yapılmıştır. Bu nedenle, bu bölümde söz konusu sınırlar içinde geçerli olan bünye bağıntıları verilmiştir.

Birinci mertebeye göre normal gerilmeler açı değişimi, kayma gerilmeleri de boy değişimi yapmayacaklarından; gerilmeden bağımsız olarak genellikle ısı değişimi gibi nedenlerle gerçekleşen ilkel şekil değiştirmelerin olmaması durumunda, doğrusal – elastik, homojen ve izotrop malzeme için düzlem gerilme halinde bünye bağıntıları [10, 11], Denklem 2.3.a ve Denklem 2.3.b'deki gibidir.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.3.a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (2.3.b)$$

Burada bütün büyüklükler, kalınlık boyunca sabit olup; sadece x ve y'nin fonksiyonudur. Denklemlerden görüldüğü üzere, kalınlık doğrultusundaki z eksenine paralel doğrultuda kayma gerilmeleri bulunmadığından; x ile z ve y ile z eksenlerinin dikliği bozulmaz, dolayısıyla şekil değiştirmeden önce z eksenine paralel olan her doğru, şekil değiştirmeden sonra da z eksenine paralel kalır. Ayrıca bu gerilme halinde, kuvvetlerin etki ettiği düzleme dik normal gerilmeler oluşmazken, bu doğrultudaki birim şekil değiştirmelerin de sıfır olması şart değildir ve özel haller dışında sıfırdan farklıdır.

2.1.1.3. Yer Değiştirme – Birim Şekil Değiştirme Bağlılıkları

Genel durumda doğrusal olmayan ikinci merteye terimler içeren yer değiştirme ve birim şekil değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar, düzlem gerilme hali için x ve y'nin sürekli ve tek değerli fonksiyonları olan $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ve sadece z'nin fonksiyonu olan $w = w(z)$ yer değiştirmelerinin, cismin karakteristik boyutları yanında çok küçük olmaları halinde sadeleştirilerek Denklem 2.4'deki doğrusal terimlerle ifade edilirler.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

2.1.2. Düzlem Gerilme Haline Ait Uygunluk Denklemleri

Bir düzlem gerilme probleminde, problemin bilinmeyenleri olan 8 büyüklük $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, u ve v'nin sağlaması gereken denklemler, Denklem 2.2, Denklem 2.3 ($\varepsilon_z, \gamma_{xz}$ ve γ_{yz} hariç) ve Denklem 2.4'de verilen 8 temel denklemdir. Bu 8 denklem, 2 denge denklemi ve gerilmeler cinsinden yazılarak 1 uygunluk koşulu yardımıyla 3'e indirilebilir [8].

İki eksenli problem hallerinde, birim şekil değiştirme bileşenlerinden yalnız $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} 'yi göz önüne almak yeterlidir. Bu üç birim şekil değiştirme bileşeni, Denklem 2.4'de u ve v gibi iki yer değiştirme fonksiyonuyla ifade edildiklerine göre keyfi olarak seçilemezler ve aralarında Denklem 2.4'deki ifadelerden kolaylıkla elde edilebilen bir belirli bağıntı vardır. ε_x 'in y'ye göre, ε_y 'in x'e göre iki kere ve γ_{xy} 'nin bir kere x'e bir kere de y'ye göre türevi alınırsa Denklem 2.5 elde edilir [7].

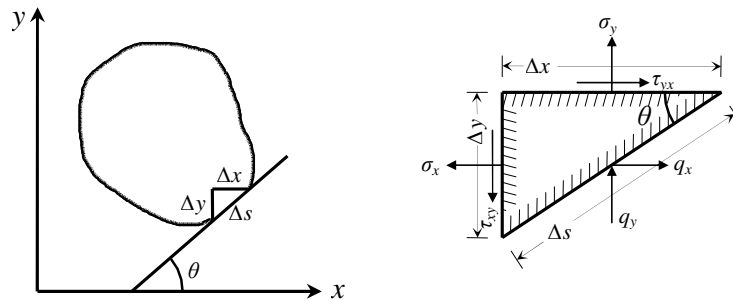
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.5)$$

Uygunluk şartı adını alan bu diferansiyel bağıntı, birim şekil değiştirme bileşenlerine Denklem 2.4'deki bağıntılar ile bağlı olan u ve v fonksiyonlarını doğrulamak üzere, gerilme bileşenlerinin sağlamaları gereken ifadedir [7]. Bu ifade, gerilme bileşenleri arasındaki bir bağıntıya çevrilebilir. Bu amaçla, Denklem 2.5'de, ϵ_x , ϵ_y ve γ_{xy} bileşenleri için Denklem 2.3'de verilen ifadeler yerlerine konular ve diferansiyel denge denklemlerinden ilkinin x 'e göre, ikincisininin y 'ye göre türevleri alınarak taraf tarafa toplanmasıyla elde edilen denkleme eşitlenirse; düzlem gerilme halinde gerilmeler cinsinden uygunluk koşulu Denklem 2.6'daki gibi elde edilir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

2.1.3. Düzlem Gerilme Haline Ait Sınır Şartları

Düzlemsel elastisitenin temel denklemlerinin belirli bir bölgede sağlanmasına ek olarak, bölge sınırlarına varınca bulunan gerilme ve yer değiştirme değerlerinin problemde verilmiş olan değerlerle aynı olmaları gerekir [2]. Problemin sınır şartları olan bu ek koşullar, gerilmeler veya yer değiştirmeler cinsinden verilebilir. Gerilmeler cinsinden verilmesi halinde problem, “gerilme problemi” ; yer değiştirmeler cinsinden verilmesi halinde ise “yer değiştirme problemi” olarak ele alınır.



Şekil 2.3 Sınır şartları [9]

Düzlem gerilme halinin gerçekleştiği bir gerilme probleminde esas alınan büyüklükler σ_x , σ_y ve τ_{xy} fonksiyonları olup; bu problemlerin genel denklemleri, Denklem 2.2 ile verilen diferansiyel denge denklemleri ve Denklem 2.6 ile verilen uygunluk koşuludur.

Ayrıca aranan σ_x, σ_y ve τ_{xy} fonksiyonları, sınırda Şekil 2.3’de görülen sınır elemanın dengesinden elde edilen Denklem 2.7’deki sınır şartlarını sağlamak zorundadırlar. Gerilmelerin belirlenmesinin ardından problemin geriye kalan diğer büyüklükleri $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} Denklem 2.3’den; u ve v değerleri ise Denklem 2.4’den elde edilir.

$$q_x = \sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \quad q_y = \tau_{xy} \sin \theta - \sigma_y \cos \theta \quad (2.7)$$

Bir yer değiştirme probleminde esas alınan büyüklükler ise, u ve v fonksiyonlarıdır. İki bilinmeyenli olan yer değiştirme problemlerinin genel denklemleri, gerilme problemi için Denklem 2.2’de gerilmeler cinsinden verilmiş denge denklemlerinin bünye ve yer değiştirme – birim şekil değiştirme bağıntılarından yararlanılarak yer değiştirmeler cinsinden yazıldığı Denklem 2.8.a ve Denklem 2.8.b’ deki denge denklemleridir. u ve v fonksiyonları, ayrıca sınırda verilmiş yer değiştirme değerlerini sağlamak zorundadırlar. Gerilme problemlerinde olduğu gibi, problemin geriye kalan büyüklükleri temel denklemler yardımıyla bulunur.

$$G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + X = 0 \quad (2.8.a)$$

$$G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + Y = 0 \quad (2.8.b)$$

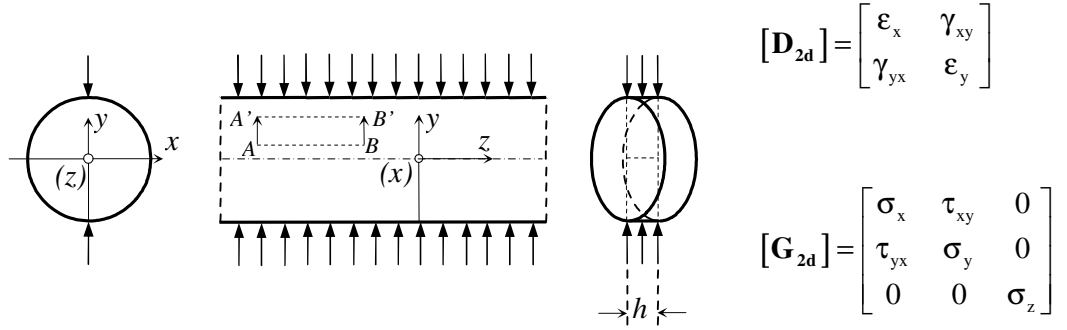
2.2. DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ

Bir şekil değiştirme halinde yer değiştirme vektörleri, aynı düzleme paralel kalıyorsa ve bu düzleme dik koordinata bağlı değilse ise; bu tip şekil değiştirmeye düzlem şekil değiştirme adı verilir [5].

Düzlem şekil değiştirme halinin gerçekleştiği pek çok önemli problem vardır. Örneğin, enine basınç etkisindeki istinat duvarı, menfez yahut tünel, iç basınç etkisindeki silindirik boru, bilyalı yataklarda olduğu gibi çap düzlemi içinde basınç etkisindeki silindir [7]. Pratikte önem taşıyan bu tür problemlerin hemen hepsinde silindirik veya prizmatik cisimlerle karşılaşılır [2]. Bu nedenle düzlem şekil değiştirme problemleri, literatürde “uzun silindir problemleri” olarak da adlandırılır.

Şekil 2.4’de yarıçapı uzunluğuna nazaran çok küçük olan bir silindir görülmektedir. Söz konusu cismin, boyuna elemanlarına dik kuvvetlerle yüklenmesi ve bu kuvvetlerin uzunluk boyunca sabit kalması durumunda; bir başka deyişle yüzeye etkiyen kuvvetlerin bileşenlerini göstermek üzere $q_x = q_x(x, y)$ $q_y = q_y(x, y)$ $q_z = 0$ olması ve aynı zamanda silindirin birim hacmine etkiyen kütle kuvvetlerinin de yüzey kuvvetleriyle aynı karakterde olması durumunda; bütün dik kesitlerdeki biçim değişiklikleri aynı olur ve sadece (x, y) düzlemi içinde gelişir. Buradan silindirin herhangi bir $A(x, y, z)$ noktasına ait $\overline{AA'}$ yer değiştirme vektörünün (x, y) düzlemine paralel olması ve yalnız z değişmekle bu vektörün değişmemesi gerektiği sonucuna varılır. Yani z eksenine paralel bir doğru üzerinde alınan A ve B noktalarına ait $\overline{AA'}$ ve $\overline{BB'}$ yer değiştirme vektörleri birbirine eşittir. Bu açıklamaya göre yer değiştirme vektörlerinin bileşenleri Denklem 2.9’deki gibi olmalıdır ve bir yer değiştirme durumu bu şartları gerçeklerse, onun tarif ettiği şekil değiştirme haline düzlem şekil değiştirme hali denir [9].

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0 \quad (2.9)$$



Şekil 2.4 Düzlem şekil değiştirme hali, şekil değiştirme ve gerilme tansörleri

u ve v fonksiyonlarının yalnız x, y değişkenlerine bağlı olması nedeniyle bu şekil değiştirme halinde ϵ_x, ϵ_y ve γ_{xy} fonksiyonları da yalnız x, y değişkenlerine bağlıdır. Ayrıca Denklem 2.9’den da görüldüğü üzere, z eksenine paralel doğru parçalarında bir uzunluk değişimi söz konusu olmadığı gibi bu doğru parçasının doğrultusu da şekil değiştirme sırasında kendine paralel kalır [9]. Bu durum, Denklem 2.10 ile ifade edilir. Şekil değiştirme bileşenlerine bağlı olarak, bir noktadaki gerilme hali bileşenleri ise, Denklem 2.11’deki gibidir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y) & \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y) & \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y) & \gamma_{xz} &= 0 & \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y) & \sigma_y &= \sigma_y(x, y) & \sigma_z &= \sigma_z(x, y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) & \tau_{xz} &= 0 & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.1. Düzlem Şekil Değiştirme Haline Ait Temel Denklemler

Bir düzlem şekil değiştirme probleminde de problemin bilinmeyenleri olan $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, u ve v fonksiyonlarının sağlaması gereken temel denklemler, denge denklemleri, bünye ve yer değiştirme – birim şekil değiştirme bağıntılarıdır.

Düzlem şekil değiştirme ve düzlem gerilme hallerinin gerçekleştiği iki gerilme probleminin denge denklemleri arasında bir fark yoktur. Çünkü Denklem 2.2 ile verilen denklemler, x ve y eksenleri doğrultusunda yazılmış diferansiyel denge denklemleridir ve iki düzlemsel halde de x , y eksenleri doğrultusunda gerilmeler aynı karakterdedir. Düzlem gerilme halinde sıfır olan z eksenini doğrultusundaki σ_z gerilmesi ise, düzlem şekil değiştirme halinde sadece x ve y 'ye bağlı olup; z ile değişmez. Bu nedenle bu eksen doğrultusundaki denge denklemini özdeş olarak sağlar [9].

Yer değiştirme ve birim şekil değiştirme bileşenleri arasındaki geometrik karakterli bağıntılar da z doğrultusundaki hariç olmak üzere, her iki düzlemsel hal için aynıdır ve Denklem 2.4'deki gibidir.

Ancak sağlanması gereken temel denklemlerden bünye bağıntıları, her iki düzlemsel hal için aynı değildir. Çünkü düzlem şekil değiştirme probleminde z eksenini doğrultusundaki σ_z normal gerilmesi ε_x ve ε_y hesabına etki eder. Düzlem gerilme hali için Denklem 2.3 ile verilen bünye bağıntıları, açısız birim şekil değiştirmeleri aynı olmak üzere düzlem şekil değiştirme halinde Denklem 2.12'deki gibidir.

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad \varepsilon_z = 0 \quad (2.12)$$

2.2.2. Düzlem Şekil Değişirme Haline Ait Uygunluk Denklemleri

Her iki düzlemsel hal içinde ε_x , ε_y ve γ_{xy} fonksiyonları aynı karakterde olduğundan; düzlem gerilme hali için birim şekil değiştirmeler cinsinden Denklem 2.5 ile verilen uygunluk denklemi, düzlem şekil değiştirme hali için de geçerlidir. Ancak bu iki düzlemsel halin bünye bağıntıları farklı olduğundan, düzlem gerilme için gerilmeler cinsinden Denklem 2.6 ile verilen uygunluk koşulu, düzlem şekil değiştirme halinde Denklem 2.13'deki halini alır.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$

Denklem 2.6 ve Denklem 2.13'den görüldüğü üzere; kütle kuvvetlerinin sabit olması veya ihmal edilebilmesi halinde, her iki düzlemsel halin gerilme problemleri aynı sınır şartları için aynı çözümü verir. Aradaki tek fark düzlem şekil değiştirme etkisindeki cisimde kalınlık boyunca değişmeyen $\sigma_z(x, y)$ gerilmelerinin, düzlem gerilme etkisindeki cisimde ise yine kalınlık boyunca değişmeyen $\varepsilon_z(x, y)$ birim şekil değiştirme bileşeninin bulunmasıdır.

Ancak kütle kuvvetlerinin sıfır olması halinde bile bir yer değiştirme probleminin çözümü, gerilme probleminin aksine her iki düzlemsel hal için aynı değildir. Çünkü sınır şartlarının yer değiştirmeler cinsinden verildiği bir düzlem şekil değiştirme halinin denge denklemleri, düzlem gerilme hali etkisindeki bir yer değiştirme problemi için verilen Denklem 2.8.a ve Denklem 2.8.b'den farklı olup; Denklem 2.14.a ve Denklem 2.14.b'deki gibidir.

$$G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + X = 0 \quad (2.14.a)$$

$$G \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + Y = 0 \quad (2.14.b)$$

2.3. AIRY GERİLME FONKSİYONU

Uygulamada çok defa problemin sınır şartları, gerilme tipinden verilir; bu sebeple düzlemdeki elastisitenin gerilme problemi, diğerlerine (yer değiştirme problemi) göre bir öncelik kazanır [9]. Düzlemsel elastisitenin gerilme problemine en uygun düşen ve en çok kullanılmış olan formülasyon, 1862 yılında G.B. Airy tarafından önerilmiş olan ve bu nedenle “Airy Gerilme Fonksiyonu” adını alan bir skaler fonksiyon cinsinden yapılan formülasyondur [2]. Gerilme problemi, çift değişkenli bu fonksiyon ile çok sadeleşir. Bütün problem, bu tek fonksiyonun belirtilmesine indirgenebilir [9].

Bir gerilme probleminde sağlanması gereken genel denklemler, düzlem gerilme hali için Denklem 2.2 ve Denklem 2.6 ile düzlem şekil değiştirme hali için ise Denklem 2.2 ve Denklem 2.13 ile verilmişti. Bu denklemlerde kütle kuvvetlerinin en genel durumda değişken olduğu ve V potansiyeline sahip olduğu kabulü yapılarak, bileşenler Denklem 2.15 ile ifade edilirse; Denklem 2.2’deki denge denklemlerini özdeş olarak sağlatacak gerilme fonksiyonu $\Phi(x, y)$ ile gerilmeler arasındaki ilişki, Denklem 2.16’daki gibi kurulur.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.16)$$

Gerilme fonksiyonu cinsinden Denklem 2.16 ile ifade edilen gerilmeler, Denklem 2.6’daki uygunluk denkleminde yerlerine konulursa; düzlem gerilme hali için Airy gerilme fonksiyonu cinsinden uygunluk denklemi, Denklem 2.17’deki biharmonik denklem halini alır. Denklem 2.16’daki ifadeler, Denklem 2.13’de yerlerine konulursa; düzlem şekil değiştirme hali için Airy gerilme fonksiyonu cinsinden uygunluk denklemi ise, Denklem 2.18’deki gibi elde edilir.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Phi = -(1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \Phi = -\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V \quad (2.18)$$

Böylece kütle kuvvetlerinin en genel durumunda, düzlem gerilme hali için Denklem 2.2 ve Denklem 2.6 ile verilen bir problemin çözümü Denklem 2.17'deki; düzlem şekil değiştirme hali için Denklem 2.2 ve Denklem 2.13 ile verilen bir problemin çözümü ise Denklem 2.18'deki diferansiyel denklemi sağlayan bir $\Phi(x, y)$ fonksiyonunun bulunmasına indirgenir. Denklem 2.17 veya Denklem 2.18'deki diferansiyel denklemleri sağlayan birçok fonksiyon bulunur. Ancak gerçek çözüm, bunlar arasından sınır şartlarını da sağlayan fonksiyondur.

Kütle kuvvetlerinin sıfır veya sabit olması halinde ise, Denklem 2.17 ve Denklem 2.18'in her ikisinde de eşitliğin sağ tarafı sıfır olur. Bu durumda gerilme problemi, malzeme katsayılarına bağlı olmadığı gibi, düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme hallerinde aynı sonuçları verir.

2.4. DÜZLEM ELASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Düzlemsel elastisite problemlerinin çözüm yöntemlerinin pek çoğunda temel denklem olarak Airy gerilme fonksiyonunun tek bilinmeyen fonksiyon olduğu Denklem 2.17 veya Denklem 2.18 alınır ve bu denklemin çözülüş şekli yöntemin özelliğini oluşturur [2]. Elastisite teorisinin çeşitli sınır değer problemlerinin çözümlenebilmesi için kullanılan belli başlı yöntemler, “Ters Yöntem”, “Yarı Ters Yöntem”, “Düz veya Direkt Yöntem”, “DeneySEL Yöntemler”, “Enerji Yöntemleri” ve “Nümerik Yöntemler” olarak sıralanabilir. Bu çözüm yöntemleri dışında söz konusu problemlerin çözümünde matematiksel teknikler olarak sınıflandırabileceğimiz, “Potansiyel Fonksiyon Yöntemi”, “Uygun Koordinat Takımının Kullanılması”, “Betti Çözüm Yönteminin Kullanılması”, “İntegral Dönüşümlerinin Kullanılması”, “Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarının Kullanılması” ve “İntegral Denklemlerinin Kullanılması” gibi çözüm teknikleri de bulunmaktadır [12]. Çözüm yöntemleri ve teknikleri arasında kesin bir sınır olmamakla birlikte bu bölümde sadece çeşitli sınır değer problemlerinin çözümlenebilmesi için kullanılan belli başlı yöntemler kısaca özetlenmiştir.

2.4.1. Ters Yöntem

Bu yöntemde problemin çözümünü oluşturan gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme bileşenlerinin tümü için, ilgili diferansiyel denklemleri gerçekleyen bazı uygun fonksiyonlar seçilir [12]. Bu fonksiyonlardan verilen bölgenin çevresindeki sınır şartları hesap edilir. Bulunan sınır şartları, hangi problemde söz konusu olursa; onun için çözüm elde edilmiş olur [9]. Yani bu yöntemde diferansiyel denklem takımının çözülerek, problemin çözümünün yapılması yerine; ters olarak, denklem takımını sağlayan bir takım fonksiyonlar içinde sınır koşullarını sağlayan, çözüm olarak seçilmektedir [12].

Uygulama için önemli olan birçok fonksiyonun vereceği gerilme ve sınır şartlarının tablosunun hazırlanması halinde, gerektiğinde bu tablodan verilen sınır şartlarına uygun bir çözüm seçmek mümkündür [9]. Ayrıca bu yöntem ile, birkaç basit problemin çözümü yapılabilirse bunları kendi aralarında süperpoze etmek suretiyle pratik bakımdan diğer bazı problemlere de çözüm bulmak mümkün olur [12].

2.4.2. Yarı Ters Yöntem

Bu yönteme göre, problemin çözümünü teşkil eden gerilme, şekil değiştirme veya yer değiştirme bileşenlerinin tümü yerine bir kısmı için, ilgili diferansiyel denklemlerin bazılarını sağlayan uygun bir takım fonksiyonlar seçilir. Geriye kalan bileşenler de, geri kalan diferansiyel denklemleri integre etmek ve sınır koşullarını sağlamak suretiyle belirlenirler. Yönteme bilinmeyenlerin tümü yerine bir kısmına uygun fonksiyonlar seçerek ve diğer kısmının ise bazı diferansiyel denklemleri ve sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmesinden dolayı yarı ters yöntem adı verilir [12].

Yöntem, Saint - Venant tarafından bulunmuştur. Saint - Venant bu yöntemle ilgili çalışmalarını 1853'te Fransız Akademisi'ne verdiği bir anlamda o dönemde çığır açan çalışmasında sunmuştur. Bu çalışmasında değişik şekillerde kesitlere sahip prizmatik çubukların burulma ve eğilmesi konusunda çözümler vermiştir. Saint – Venant, yarı ters yöntemi ayrıca ucundan yüklü bir konsol kirişin eğilme problemine uygulamıştır. Elemanın her kesitindeki normal gerilmelerin elemanter kiriş teorisi tarafından doğru olarak verildiğini varsayarak; bütün elastisite denklemlerini sağlayan kayma gerilmeleri dağılımının bulunmasının mümkün olduğunu göstermiştir. Bu şekilde, çeşitli kesitlere

sahip prizmatik çubukların eğilmesi için kesin çözümler elde etmiştir. Çalışmasını sadece problemin genel çözümü ile sınırlandırmamış; ayrıca dikdörtgen kirişlerde maksimum kayma gerilmesinin hesaplanabileceği tablolar da hazırlamıştır [3].

2.4.3. Düz veya Direkt Yöntem

Belirli bir sınır değer problemini oluşturan ilgili diferansiyel denklem takımının tümü, doğrudan doğruya integre edilerek çözümler bulunduktan sonra, bunlarla sınır koşullarının gerçekleşmesine çalışılır. Bu yöntem, denklem takımlarının integrasyonunda veya sınır koşullarının sağlatılmasında ortaya çıkan güçlükler nedeniyle, az sayıda probleme başarı ile uygulanabilmiştir [12].

2.4.4. Deneysel Yöntemler

Sınır şekillerinin ve yüklemelerin matematiksel yaklaşıma uygun olmadığı [2] yani gerek form ve gerekse sınır şartları yüzünden karışık olan problemlerde, analitik çözümler elde etmede karşılaşılan güçlükler çok büyük ölçüdedir. Fakat bu güçlükler, nümerik yöntemler ve yüzeysel şekil değiştirmelerin “strain – gauge”lerle ölçülmesi veya “fotoelastik yöntem” gibi deneysel yöntemler ile çözümlenebilir [7].

Deneysel yöntemlerde yapılacak bir model veya prototip üzerinde, şekil değiştirme veya gerilmeler doğrudan doğruya ölçülür [9]. Fotoelastik yöntem, David Brewster’in gerilme etkisinde ve polarize ışık altında bırakılan bir cam parçasında gerilme sebebi ile parlak renkli şekillerin görülmesi hakkındaki buluşuna dayanır [7]. Bu yöntem ile düzlemsel elastisite problemlerinin çözümüne ilişkin ilk dönem çalışmaları, Maxwell, C. Wilson, G. Stokes ve A. Mesnager gibi isimler tarafından yapılmıştır.

Fotoelastik renk şekilleri ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırmalar fizikçi Maxwell tarafından yapılmıştır. Fikir çok daha sonra C. Wilson tarafından münferit kuvvetle yüklü kirişteki gerilmelerin incelenmesine uygulanmıştır [7]. Wilson, yöntemi ortasından yüklü dikdörtgen kesitli bir kirişteki gerilmelerin araştırılmasında uygulamış ve kendi ölçtüğü gerilmeler ile klasik kiriş formülasyonunun tahminleri arasında büyük ölçüde farklılıklar bulmuştur. Ancak bu farklılığın açıklaması G. Stokes tarafından yapılmıştır. Gerilmelerin fotoelastik yoldan ölçülmesinin bir başka örneği A. Mesnager’in çalışmasında yer alır. Mesnager, bir plağın orta düzleminde etkiyen

konsantre yükler tarafından oluşturulan radyal gerilme dağılımını deneysel olarak incelemiştir. 19. yy'nin sonlarına doğru mühendisler fotoelastik yöntemin önemini anlamaya başlamışlardır. 20. yy'nin ilk yıllarında yöntemin kullanımında hızlı bir artış görülmüş ve 1950'lerde fotoelastisite, deneysel gerilme analizlerinde en etkili yöntemlerden biri olmuştur [3].

2.4.5. Enerji Yöntemi

“Ters Yöntem”, “Yarı Ters Yöntem” ve “Düz veya Direkt Yöntem” olarak adlandırılan yöntemlerle elastik bir cisim ile ilgili bir sınır değer problemi çözülürken; denge denklemleri, yer değiştirme – şekil değiştirme bağıntıları, bünye bağıntıları ve sınır koşullarının oluşturduğu denklem takımından hareket edilir. Bu denklemlerle bulunan çözümün uygunluk koşullarını da sağlaması ayrıca gerekmektedir [12]. Probleme ait bilinmeyenlerin diferansiyel denklem takımlarının çözümü sonucu elde edilmesi nedeniyle bu üç yöntemdeki çözüm yoluna “diferansiyel denklem yolu” denir.

Sürekli ortam mekaniğinde kullanılan bu yolun dışında “Enerji Yöntemi” adı verilen bir başka yol daha vardır. Varyasyon temeline dayanan enerji yöntemlerinde, karışık diferansiyel denklemi çözmek yerine; fiziksel anlamı enerji olan belirli bir integrali minimum yapan bir fonksiyonu bulmak yoluna gidilir. Bu tür problemlerle uğraşan matematik dalına “varyasyon hesabı” denildiği için söz konusu çözüm yolunda izlenen yöntemler, “varyasyon yöntemleri” adını alırlar [12].

Gerçekte iki problem matematiksel olarak eşdeğerdir. Bu yöntemin iyi bir yanı, basit bazı problemlere kesin çözüm bulmakta kullanılabildiği gibi, özellikle sınır şekilleri, sınır gerilme ve yer değiştirmeleri ve kütle kuvvetlerinin basit fonksiyonlarla verilmediği durumlarda yaklaşık çözümler bulmaya da uygun olmasıdır [2].

2.4.6. Nümerik Yöntemler

Deneysel yöntemler ve enerji yöntemleri gibi, nümerik yöntemler de; analitik çözüm elde etmenin güç olduğu problemlerde başvurulan yaklaşık çözüm yöntemlerindedir. Bu yöntemler belli başlı “Sonlu Farklar Metodu”, “Sonlu Elemanlar Metodu” ve “Sınır Elemanlar Metodu” olmak üzere üç yöntemden oluşur. Mevcut çalışmada bu yöntemlerden sistematikliği nedeniyle bilgisayar programlamasına en uygun olan ve bu

nedenle de en yaygın olarak kullanılan, Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) tercih edilmiştir.

FEM, mühendislik uygulamalarında karşılaşılan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan nümerik bir çözüm yöntemidir. Parçalı polinom enterpolasyonu olarak da tanımlanan yöntemin yapı mekaniği problemlerine uygulanması halinde; incelenen yapıya ait bir eleman üzerindeki yer değiştirme gibi bir alan değişkeni, bu alan değişkeninin düğüm noktalarındaki değerlerinden enterpolasyon yoluyla elde edilir. Söz konusu yapıyı oluşturan elemanların birleştirilmesiyle, alan değişkeninin tüm yapı üzerinde parçalı bir şekilde enterpolasyonu yapılmış olur. Düğüm noktalarında bu alan değişkeninin en iyi değerleri ise, toplam enerji gibi bir fonksiyonu minimum yapan, yani denge durumuna ait değerlerdir ve aranılan sonuçları vermektedir [13].

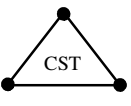
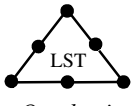

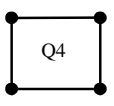
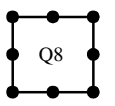
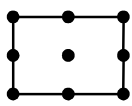
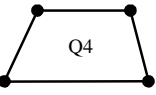
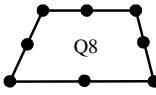
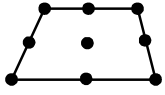
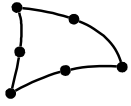
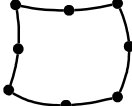
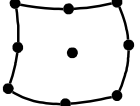
Yöntemin genel mühendislik problemlerinin çözümü için gelişimi, bilgisayarların gelişmesiyle birlikte başlamıştır. Çünkü bir mühendislik probleminin sonlu eleman çözümünün özü, bir takım cebirsel denklemler takımının kurulması, çözülmesi şeklindedir ve bu işlemler, ancak bilgisayarların kullanılması ile etkin şekilde yapılabilir ve genel uygulama sağlanabilir. Mühendislik analizlerinde bu iki unsur; etkin olma ve genel kullanılabilirlik, analizler için kullanılan ve geliştirilen teoremin temelini oluşturmaktadır. Bu avantajları sayesinde FEM, mühendislik uygulamalarında geniş bir uygulama alanı bulmuştur [14]. Ancak yöntemin temelleri ve ilk formülasyonları, kompleks yapıların analizi için geliştirilmiştir [15]. İki boyutlu elastik problemler ise, FEM uygulamalarının ilk başarılı örnekleridir [11]. Bir yapı mekaniği probleminin bu yöntem ile analizi sırasında özetle şu işlemler gerçekleştirilir:

1. Sonlu eleman modelinin hazırlanması
2. İncelenen sistemdeki tüm elemanların davranış denklemlerinin elde edilmesi
3. Sistem davranış denkleminin elde edilmesi
4. Yer değiştirme bilinmeyenlerinin hesaplanması
5. Sistemi oluşturan elemanlardaki iç kuvvetlerin hesaplanması.

Analizin ilk aşamasında incelenen sürekli ortam veya yapı, geometrisine ve problemin yapısına uygun olarak hayali çizgilerle veya yüzeylerle sonlu elemanlara ayrılır ve

ardından oluşturulan bu elemanların birbirlerine sınırları üzerinde ya da bazı durumlarda iç kısımlarda bulunan düğüm noktaları ile bağlandıkları kabul edilerek düğüm noktalarının yerleri belirlenir. İskelet yapılarda bu düğüm noktalarının yerlerini belirlemek oldukça kolaydır. Örneğin kafes kirişlerde düğüm noktaları, elemanların bağlantı noktalarına konulabilir. Benzer şekilde çerçeve türü yapılarda rijit birleşim noktaları da düğüm noktalarının konulabileceği ve tekil yüklerin uygulanabileceği uygun noktalardır. Yapıların süreklilik göstermesi halinde ise, (örneğin plaklar, perde duvarlar, kabuk yapılar, baraj gövdeleri v.s.) düğüm noktalarının yerlerini belirlemek için bariz noktalar yoktur. Bu tür sistemleri elemanlara bölmek ve düğüm noktalarının yerlerini uygun bir biçimde belirlemek problemin yapısına ve analiz sonuçlarında arzu edilen hassaslığa bağlıdır. Genellikle gerilemelerin yüksek olabileceği ya da yön değiştirebileceği bölgeler daha sık, diğer kısımlar ise daha az sayıda elemanlara bölünerek daha sağlıklı sonuçlar elde etmek mümkün olur [16]. Bu tür sürekli ortamların iki boyutlu sonlu eleman modellerinde kullanılabilecek eleman tipleri, Tablo 2.1’ de görülmektedir.

Tablo 2.1 İki boyutlu sürekli ortam modellerinde kullanılabilecek bazı sonlu eleman tipleri

<i>Üçgen Eleman Tipleri</i>	 CST Linear	 LST Quadratic	 Cubic
<i>Dikdörtgen Eleman Tipleri</i>	 Q4 Linear	 Q8	
<i>Dörtgen Eleman Tipleri</i>	 Q4 Linear	 Q8	
<i>Eğri Sınırlara Sahip Eleman Tipleri</i>			

Tablo 2.1'deki her düğüm noktasında iki doğrusal yer değiştirme serbestliği olan üç düğüm noktalı doğrusal üçgen eleman (CST), iki boyutlu katı cisimler için geliştirilen ilk eleman tipidir. Formülasyonu da iki boyutlu elemanlar arasında en basit olanıdır [17]. Bölüm 3.1.2'de de belirtildiği üzere, doğrusal üçgen eleman içerisinde şekil değiştirme ve dolayısıyla da gerilme sabittir. Gerçekte gerilme ve şekil değiştirmeler, yapı elemanları boyunca değişirler; bu nedenle kaba bir ağ yapısı içerisinde doğrusal üçgen elemanları kullanmak gerilme ve şekil değiştirme dağılımında oldukça hatalı sonuçlar verebilir. Bu durumlarda sonlu eleman modelinin iyileştirilmesi yoluna gidilebilir. Özetle bu elemanlar, bir sonlu eleman modelinde küçük gerilme ve şekil değiştirme değişimlerinin olduğu bölgelerde gerçekçi sonuçlar verirler, ancak diğer durumlarda çok iyi sonuç vermeyebilirler [13].

Tablo 2.1'de görülen yine her düğüm noktasında iki doğrusal yer değiştirme serbestliği bulunan doğrusal dikdörtgen elemanlarda (Q4), şekil değiştirmeler sabit değildir, dolayısıyla gerilmeler de sabit değildir. Bu nedenle bu elemanlar, doğrusal üçgen elemanlara nazaran yapı boyunca gerilme ve şekil değiştirme dağılımı açısından daha gerçekçi sonuçlar verirler. Ağ oluşturma ve karmaşık geometriye sahip modeller için tekrar tekrar ağ oluşturma işlemlerinde problem olmaması halinde doğrusal üçgen elemanlar, bu elemanlara nazaran çok fazla tercih edilmemektedir [17].

Üçgen elemanlara olan üstünlüklerine nazaran dikdörtgen elemanların da kullanımı sınırlıdır. Örneğin, analizi yapılan ortamın dikdörtgen harici bir geometriye sahip olması halinde, bu elemanların kullanımı zordur. Bu durumlarda dikdörtgen eleman kullanılamayan bölgelerde üçgen elemanlar kullanılabilirdiği gibi, Tablo 4.2'de görülen doğrusal dörtgen elemanlar (Q4) da kullanılabilir [17]. Bu elemanların formülasyonlarının elde edilmesinde doğal koordinatlara dönüşümün kurulması halinde, geri kalan prosedür dikdörtgen elemanlarıkiyle aynıdır.

Modellerde, Tablo 2.1'de görülen düz ya da eğri sınırlara sahip üçgen, dikdörtgen, dörtgen veya bunların kombinasyonları kullanılabilir. Doğrusal elemanların yer değiştirme alanları, x ve y doğrultularında doğrusaldır. Bu elemanlar, söz konusu problemlerin analizinde en çok tercih edilen elemanlardır. Gerilme hesabında daha fazla hassaslık istendiği durumlarda, tabloda görülen her düğüm noktasında iki doğrusal yer

değiştirme serbestliği bulunan, 6 düğüm noktalı doğrusal şekil değiştirme üçgenleri (LST) gibi yer değiştirme alanları ikinci dereceden (quadratic) olan elemanlar veya yer değiştirme alanları üçüncü dereceden (cubic) üçgen elemanlar gibi yüksek mertebeli sonlu elemanlar kullanılabilir. Benzer şekilde tabloda görülen quadratic 8 düğüm noktalı dikdörtgen / dörtgen elemanlar ile 9 düğüm noktalı doğrusal dikdörtgen / dörtgen elemanlar da yüksek mertebeli elemanlardır. Ancak bu elemanlar, sahip oldukları düğüm noktalarının artması ve dolayısıyla da dikkate alınması gereken serbestlik sayısının artmasının getirdiği işlem hacmi yoğunluğu nedeniyle uygulamada doğrusal elemanlara nazaran daha az tercih edilmektedir. Eğri sınırlara sahip yüksek mertebeli elemanlar ise, eğri sınırlara sahip alanları modellemede kullanılırlar.

Günümüzde dörtgen eleman kullanımının, üçgen eleman kullanımına kıyasla daha doğru olduğu düşünülür. Çünkü üçgen elemanlarla oluşturulmuş bir sonlu eleman modeli, genellikle aynı sayıda doğrusal dikdörtgen veya dörtgen elemanlardan oluşan modele kıyasla problemin analitik çözümüne daha uzak sonuçlar verirler. Ancak üçgen elemanların da kullanılması gereken durumlar hala mevcuttur ve bu nedenle bu elemanların kullanımı terk edilmemiştir. Çünkü doğrusal üçgen elemanlar, karmaşık geometrilere adaptasyonları nedeniyle çok kullanışlıdırlar ve bunlar, genelde keskin köşeli karmaşık geometriye sahip iki boyutlu bir modeli oluşturmak için idealdirler. Ayrıca basit geometrik özelliklere sahip üçgensel yapısı nedeniyle bu elemanlar, ağ oluşturma işlemi açısından en basit olan sonlu eleman tipidir [17]. Doğrusal üçgen elemanların belirtilen kusurlarına rağmen, bu elemanlardan oluşan ağ yapısı tekrar tekrar iyileştirildiğinde doğru sonuçlara yaklaşmak mümkündür [13].

Bu elemanların kullanımıyla ilgili bir başka husus ise, sonlu eleman analizini gerçekleştiren programlarla ilgilidir. Bilindiği üzere günümüzde çoğu analiz programlarının otomatik ağ yaratıcıları, sadece üçgen elemanlar kullanmaktadır. Dörtgen elemanlardan oluşan ağ modeli hazırlayan programlar da mevcuttur. Ancak bu programlar da, zor durumlar için hala yama olarak üçgen elemanları kullanmaktadır. Bu nedenle, birçok mühendislik probleminin analizi için doğrusal üçgen elemanlar kullanılabilirliklerini hala korumaktadırlar [17].

Bu tez kapsamında, düzlem elastisite problemlerinin oluştuğu sistemlerin analizi için hazırlanan ağ modellerinde doğrusal üçgen elemanlar kullanılmış ve Bölüm 3.2’de detayları verilen bilgisayar programına tez kapsamında eklenen modüller, bu doğrusal üçgen elemanların literatürden elde edilen formülasyonuna göre çalışarak sonuçlar üretmiştir. Bu nedenle sonlu eleman analizinin ikinci aşaması olan “Eleman Davranış Denklemlerinin Elde Edilişi” ve sonraki aşamalar, Bölüm 3’de “Malzeme ve Yöntem” başlığı altında verilmiştir.

2.5. KONU İLE İLGİLİ ÇALIşMALAR

Düzlem gerilme yayılışı problemi, ilk defa A. Clebsch (1833-1872) tarafından ele alınmıştır. Clebsch düzlem gerilme halinde sınırdaki kuvvet dağılımının hangi şartları sağlaması gerektiğini araştırmış ve yer değiştirmeler için genel ifadeleri vermiştir. Daha sonrasında bu genel ifadeleri sınırında radyal yer değiştirmeleri tanımlı dairesel bir plağa uygulamıştır [7].

19. yy.’nın son dönemlerinde Bölüm 2.4.4’de de belirtilen Maxwell, C. Wilson, G. Stokes ve A. Mesnager gibi isimlerin düzlem elastisite problemleri ile ilgili deneysel çalışmalarının ardından bu problemlerin teorik çözümünde daha sonraki gelişmeler, gerilme fonksiyonunun kullanımı üzerine kurulmuştur. Bu fonksiyon, ilk defa 1862 yılında G. B. Airy tarafından ileri sürülmüştür. Airy, fonksiyonu dikdörtgen kesitli kirişlerin eğilme analizinde kullanmış ve gerilme fonksiyonunu sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçmiştir; fakat Saint-Venant tarafından elde edilen uygunluk denklemini de sağlaması gerektiğini göz ardı etmiştir. Maxwell “On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces” isimli çalışmasında Airy’nin hatasını düzeltilmiş ve gerilme fonksiyonu için diferansiyel denklemi elde etmiştir. Maxwell ayrıca kütle kuvvetlerinin olmaması durumunda eşitliklerin her iki düzlemsel elastisite problem türü için aynı olduğunu ve gerilme dağılımının malzemenin elastik sabitlerinden bağımsız olduğunu göstermiştir [3].

Elastisitenin iki boyutlu problemlerinin incelenmesinde daha ileri derecede gelişmeler, 20. yy’da gerçekleştirilmiş ve gerilme analizlerinde kesin çözümlerin kullanımı daha da yaygınlaşmıştır. A. Mesnager iki boyutlu problemleri polinom formunda gerilme

fonksiyonlarını kullanarak çözmüş ve sonuçlarını dar dikdörtgen kesitli kirişlerin eğilmesinde çeşitli problemlerde uygulamış. Mesnager, mukavemetin elemanter formüllerinin serbest ucundan yüklü bir konsolda normal ve kayma gerilmeleri için doğru sonuçlar verdiğini göstermiştir. Ayrıca üniform olarak yüklenmiş kiriş için kesin çözümün elemanter formüllerde pratik amaçlar için ihmal edilebilir derecede küçük düzeltmeler yapılmasını öngördüğünü göstermiştir [3].

Bölüm 4.3’de ele alınan bir doğrultuda üniform çekme etkisindeki bir levhadaki dairesel bir delik etrafındaki gerilme dağılımı ise, G. Kirsch (1898) tarafından analiz edilmiştir. Bu çözüm, maksimum gerilmenin deliğin sınırında meydana geldiğini (uygulanan çekme gerilmesinin doğrultusuna dik yöndeki çapın uç noktalarında) ve uygulanan gerilmeden üç kat daha büyük olduğunu göstermektedir. Böylece belki de ilk defa delikler tarafından meydana getirilen gerilme dağılımındaki bölgesel düzensizlikleri incelemenin ne kadar gerekli olduğu gösterilmiştir. Bu zamandan beri mühendisler, gerilme yığılması problemlerini yoğun teorik ve deneysel incelemelere konu etmişlerdir. R. C. J. Howland (1930), simetri ekseninde dairesel bir deliğe sahip sonlu kalınlıktaki bir plağı incelemiştir. Yüklerin deliğin sınırında uygulandığı durum W. G. Bickley (1928) tarafından ele alınmıştır. Elips şeklindeki delik G. V. Kolossoff (1910) ve daha sonra da C.E. Inglis (1913) tarafından incelenmiştir ve dairesel delik sınırını güçlendirerek gerilmelerin azaltılması S. P. Timoshenko(1924) tarafından araştırılmıştır [3].

Delikli levhalar ile yakın dönem çalışmalarından T. Slot ve J. P. Yalch’ ın çalışmalarında [18] üniform kenar yüklemesi etkisindeki üçgen şeklindeki, iç basınç etkisindeki altıgen şeklindeki ve üniform kesme kuvveti etkisindeki kare şeklindeki deliklere sahip delikli levhaların düzlem gerilme çözümlerini verilmiştir. Çalışmalarında ayrıca polar koordinatlarda biharmonik denklemin yaklaşık çözümüne dayalı, özel olarak geliştirilmiş bir bilgisayar programının özellikleri tanıtılmıştır. Program, sınır koşulları gerilmeler ve yer değiştirmeler cinsinden tanımlanmış dolu ya da delikli yapıları içeren iki boyutlu elastisite problemlerinin çözümü için hazırlanmıştır.

Y. Ando, K. Iida, G. Yagawa ve T. Kawai ise, çalışmalarında [19] dairesel merkezi bir deliğe sahip dikdörtgen plağın gerilme yığılması problemine enerji yöntemini

uygulanmışlardır. Bu çalışma ile sonucu Howland'ın delikli plak şerit problemi üzerine ünlü çözümüyle uyumlu olan, delikli dikdörtgen bir plağın gerilme analizine enerji yöntemlerinin uygulanması konusunda ilk çalışma gerçekleştirilmiştir.

D. K. Choi ve S. Nomura çalışmalarında [20], iki boyutlu bir elastisite problemini analiz etmek için cebirsel yazılım Mathematica'nın bir uygulamasını sunmuşlardır. Doğrusal ısı dağılımı etkisindeki iki boyutlu bir kütleli elastik bölgeleri, Galerkin yöntemini uygulayıp cebirsel yazılım Mathematica'yı kullanarak yarı analitik formda elde edilmiştir. Önerilen metodolojiyi ispatlamak amacıyla iki test durumu, analiz edilmiştir. Bunlardan biri, dikdörtgen şeklinde homojen elastik bir kütle ve diğeri de daire şeklinde homojen olmayan bölgeler içeren bir küttedir. Mevcut yöntemin, sonlu elemanlar gibi tamamıyla nümerik yöntemlere başvurmaksızın uzun ve yorucu kod yazım prosedürlerini otomatikleştirebileceği ve ayrıca bütün ilgili parametreleri tespit ettiği için, hassaslık analizlerinde ideal olduğu savunulmuştur.

A. B. Sabir ve A. Sfenjji'nin çalışmalarında [21], genel düzlem elastisite problemleri için üçgen ve dikdörtgen şeklinde şekil değiştirmeye dayalı elemanlar geliştirilmiştir. Üçgen eleman, üç köşe noktanın ve bir kenar ortası noktanın her birinde iki temel harici serbestliğe sahiptir. Eleman, varsayılan bağımsız doğrusal birim şekil değiştirmelere ve sabit kayma şekil değiştirmelerine dayalıdır. Dikdörtgen eleman ise, eleman merkezindeki noktada olduğu gibi her dört köşe noktasında üçgen elemandakiyle aynı sayıda serbestliğe sahiptir. Bu eleman, şekil değiştirmenin üç bileşeninin doğrusal değişimlerine bağlıdır. Geliştirilen üçgen ve dikdörtgen elemanların, statik yoğunlaşmayı (condensation) içeren ve kayma gerilmesinin şekil değiştirme üzerine etkisinin önemli olduğu iki boyutlu elastisite problemlerinin çözümlerini elde etmek için kullanılabilirliği belirtilmiştir.

Poul Colberg Olsen'in çalışmasında [22] ise, betonarmenin rijit – plastik sonlu eleman analizi için üç üçgen plak elemanının performansı değerlendirilmiştir. Göz önünde bulundurulmuş eleman tipleri, sabit gerilme üçgeninin 2 farklı biçimidir. İlk eleman, gerilme sürekliliğinin olmadığı; ikincisi, elemanlar arası normal gerilmede gerilme sürekliliğine sahip; üçüncü eleman ise, elemanlar arası tam bir sürekliliğe sahip doğrusal değişen gerilmeli bir eleman tipidir. Elemanlar, analitik çözümlerin mümkün

olduğu basit gerilme dzenlemeleri için değerlendirilmiştir. Bu çalışmanın ana sonucuna gore, elemanlar arası surekliliğe sahip elemanları kullanırken kirişin derinliği doğrultusunda sadece iki elemana karşılık gelen kaba ağ yapısı, oldukça doğru sonuçların elde edilmesi için yeterlidir. ngrlm gerilme surekliliğine sahip olmayan sabit gerilme ugeni ile ise, oldukça fazla sayıda elemana ihtiyaç duyulmaktadır. Çalışmada geniş bir dairesel deliğe sahip gittikçe incelen bir beton duvarlı daha karmaşık bir problem de dikkate alınmıştır. Bu problemin sonuçları basit problemler için gözlenen performans yoluyla yorumlanmış ve açıklanmıştır. Rijit – plastik analizin pratik uygulanabilirliğini görselleştirmek açısından 4000’den fazla elemana sahip oldukça büyük gerçek bir yapı sistemi analiz edilmiştir.

P. G. Bergan ve C. A. Felippa çalışmalarında [23], açısal yer değiştirme serbestliklerine sahip ugen şeklinde bir membran elemanı geliştirmişlerdir. Elemanın geliştirilmesinde Bergan ve Nygard’ın formülasyonunu kullanmışlardır. Ugen elemanın her düğüm noktasında 2 doğrusal, 1 açısal yer değiştirme serbestliği olmak üzere toplam 9 serbestliği bulunmaktadır. Çalışmada, uygun parametre seçimiyle eleman performansının sabit gerilme ugenlerinkinden önemli ölçüde iyi olduğu grlmştir. Ayrıca, açısal serbestliklerin varlığı nedeniyle, geliştirilen elemanların özellikle kabuk yapıları modellemede uygun olacağı belirtilmiştir.

E. Providas ve M. A. Kattis ise, çalışmalarında [24] düzlem dışı eksen etrafındaki dönme serbestliğine sahip iki ugen kabuk elemanın değerlendirmesini yapmışlardır. Çalışmada, sabit gerilme ugenlerine düzlem dışı eksen etrafında dönme serbestliği eklenmiştir. Eleman, her düğüm noktasında 6 serbestliğe sahip kabuk elemanın elde edilmesi için eğilme elemanları ile kombine edilmiştir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. DOĞRUSAL ÜÇGEN ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman analizinin ikinci aşamasında incelenen sistemin tümüne ait davranış denkleminin elde edilmesi için; sistemi oluşturan her bir elemana ait davranış denklemi, toplam potansiyel enerji ve minimum potansiyel enerji prensiplerinden yararlanmak suretiyle düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilir.

Bilindiği üzere bir yapı elemanında potansiyel enerji, yer değiştirmeler veya şekil değiştirmeler sonucu iç ve dış kuvvetlerin iş yapma kapasitesini gösterir. İç kuvvetlerin yaptığı iş, şekil değiştirme enerjisidir. Elemana dıştan etkiyen P kuvveti de kendi doğrultusunda Δ yer değiştirmesi yaptığında $P \cdot \Delta$ kadar bir iş yapma kapasitesine sahip olur [4]. Buna göre bir yapı elemanının Π_e toplam potansiyel enerjisi, U_e elemanın şekil değiştirme enerjisini ve W_e dış kuvvetlerin yaptığı işi göstermek üzere Denklem 3.1'deki gibi ifade edilir.

$$\Pi_e = U_e + W_e \quad (3.1)$$

Bir çok elemanın birleştirilmesi ile elde edilen bir yapı sisteminin Π toplam potansiyel enerjisi ise; P_i sisteme ait herhangi bir i düğüm noktasına etkiyen kuvvet, Δ_i bu noktaya ait kuvvet doğrultusundaki yer değiştirme değeri, n sistemdeki mevcut eleman sayısı ve m sistemdeki mevcut düğüm noktası sayısı olmak üzere, Denklem 3.2'deki gibidir.

$$\Pi = \sum_{e=1}^n U_e + \sum_{i=1}^m P_i \cdot \Delta_i \quad (3.2)$$

Denklem 3.2'de $P_i \cdot \Delta_i$ iş terimi, sistemin düğüm noktalarındaki bilinmeyen yer değiştirme değerlerini, direkt olarak işleme sokar. U_e şekil değiştirme enerjisi ise, elemandaki gerilme ve bu gerilmelere tekabül eden şekil değiştirmelerin bir fonksiyonudur. Gerilme – şekil değiştirme bağıntıları ve yer değiştirme ve şekil

değiştirme bileşenleri arasındaki türev bağıntıları nedeniyle elemanın U_e şekil değiştirme enerjisi de, genel olarak Denklem 3.3'deki gibi yer değiştirme fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir.

$$U_e = \int_{\text{hacim}} f \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) dv \quad (3.3)$$

Böylece Denklem 3.2 ile tüm yapı sisteminin toplam potansiyel enerjisi, düğüm noktalarındaki bilinmeyen cinsinden ifade edilmiş olur. Bir sonraki aşama da ise, Minimum Potansiyel Enerji prensibi uygulanır [4]. Minimum Potansiyel Enerji prensibine göre dengede olan bir sistemde iç sürekliliği ve sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme denklemlerinin tümü için, sistemin toplam potansiyel enerjisi bir minimumdan geçer. Bir başka deyişle; belirli bir yer değiştirme ve şekil değiştirme takımı için denge koşulları, toplam potansiyel enerji minimumdan geçtiği zaman sağlanacak demektir. Böylece problemin çözümü matematiksel olarak belirli bir integral ifadeyi ekstrem (minimum) yapan konumun bulunmasına indirgeniyor demektir [4, 25, 26]. Bu prensip, sistemin düğüm noktalarındaki $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_m$ yer değiştirmeleri bilinmeyen olarak kabul edilirse Denklem 3.4 veya matris formunda Denklem 3.5 ile ifade edilebilir.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_r} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_m} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.5)$$

Denklem 3.5'de $\{\Delta\}$, toplam potansiyel enerjiyi minimum yaparak denge koşullarını sağlayan yani problemin aranan yer değiştirme bilinmeyenleri olan $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_m$ değerlerini içeren yer değiştirme takımıdır.

Sistemin tamamı için enerji prensiplerinin Denklem 3.2 ve Denklem 3.5'deki gibi formülize edilebilmesi için, bu prensiplerin öncelikle söz konusu sistemi oluşturan her eleman bazında uygulanarak, bu elemanlara ait davranış denklemlerinin elde edilmesi gerekir. Bu amaçla elemanlar için izlenmesi gereken prosedür aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

1. Her eleman için bir yer değiştirme fonksiyonu seçilir,
2. Birim şekil değiştirme ve yer değiştirme ilişkisi kurulur,
3. Gerilme ve birim şekil değiştirme ilişkisi kullanılır,
4. Potansiyel enerji prensiplerinden denge denklemleri elde edilir [15].

3.1.1. Yer Değiştirme Fonksiyonlarının Seçilmesi

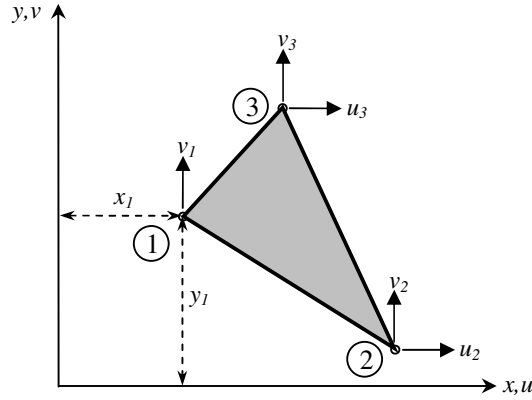
Bu aşama, her sonlu eleman tipi için davranış denklemlerinin elde edilmesinde ilk ve en önemli aşamadır. Çünkü FEM' de gerçek sonuçlara yakınsama hızının artması için en önemli etken seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının uygunluğudur. Bu nedenle bu fonksiyonların seçiminde dikkat edilmesi ve minimumda sağlanması gereken bazı koşullar vardır:

- Seçilen yer değiştirme fonksiyonları eleman içinde ve kenarlar boyunca süreklilik şartını sağlamalıdır.
- Eleman sayısı arttıkça gerçek sonuçlara yakınsama hızı artmalı ve böylece yakınsama kriteri sağlanmalıdır.
- Koordinat eksenini değiştirince çözüm farklı olmamalıdır. Bunun için yer değiştirme fonksiyonları ya tam polinom ya da tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır.
- Seçilen bu fonksiyonlar, iç ve dış kuvvetlerin işinde de sürekli olmalıdır.
- Rijit cisim hareketi ve sabit şekil değiştirme şartı sağlanmalıdır.

İncelenen sistemde oluşan problemin yapısına uygun olarak yer değiştirme fonksiyonlarının seçimi, "Pascal Üçgeni"nden yararlanılarak yapılır ve bu fonksiyonlar genellikle hesap kolaylığı, getireceği basitlikler nedeniyle polinom olarak seçilirler. Çünkü polinomlarda türev almak, integral almak kolaydır ve gerçek çözüme istenildiği kadar yaklaşmak mümkündür [27].

Çalışma kapsamında incelenen düzlem elastisite problemlerinin FEM ile analizi için Tablo 2.1'deki doğrusal üçgen elemanlardan oluşan ağ modelleri kurulmuştur. Bu

nedenle burada doğrusal üçgen elemanlara ait eleman davranış denklemleri verilmiştir. Bu elemanların oluşturduğu gibi, iki boyutlu bir modelde elemanlar sadece düzlem içerisinde deforme olabilirler ve birçok durumda bu düzlem (x, y) düzlemidir. Sisteme etkiyen dış kuvvetler için olduğu gibi herhangi bir noktadaki değişken yani yer değiştirme de x ve y yönlerinde iki bileşene sahiptir. Bu doğrusal yer değiştirme bileşenleri, Şekil 3.1'de görülen ve eleman köşelerinde bulunan üç düğüm noktasına sahip doğrusal üçgen eleman için sırasıyla u_i ve v_i ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Doğrusal üçgen eleman

Elemanın yer değiştirme alanı, (x, y) düzleminde doğrusal olduğu için, x ve y eksenleri doğrultusundaki u , v yer değiştirme fonksiyonları, x ve y 'ye bağlı doğrusal polinom olarak Denklem 3.6'daki gibi seçilir. Bu fonksiyonlar, Denklem 3.7'deki gibi matris formunda da gösterilebilir.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (3.6)$$

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad v = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Bu eşitliklerdeki α 'lar, düğüm noktalarının koordinatlarına ve yer değiştirmelerine bağlı sabit sayılardır. Bu sayıları elde etmek için düğüm noktalarının koordinatları, Denklem 3.6'da yerlerine konulursa; elemanın her düğüm noktasına ait yer değiştirme bileşenleri, genel olarak Denklem 3.8'deki gibi; matris formunda ise x doğrultusu için Denklem 3.9'daki $\{\mathbf{d}_{ex}\}$ yer değiştirme vektörü ile ifade edilir. Bu denklemdeki eşitlikten α sabitlerini içeren $\{\alpha\}_x$ katsayılar vektörü, Denklem 3.10 ile elde edilir.

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \quad (3.8)$$

$$\{\mathbf{d}_{\text{ex}}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{a}\}_x \quad (3.9)$$

$$\{\mathbf{a}\}_x = [\mathbf{G}]^{-1} \{\mathbf{d}_{\text{ex}}\} \quad (3.10)$$

Denklem 3.10'da $[\mathbf{G}]^{-1}$ ile gösterilen 3×3 'lük $[\mathbf{G}]$ matrisinin evriği, Denklem 3.11'deki gibi elde edilir. Bu denklemde $2A$ değeri, $[\mathbf{G}]$ matrisinin determinanı olup; A değeri, üçgen elemanın yüzey alanını vermektedir ve elemanın düğüm noktalarının koordinatları cinsinden Denklem 3.12 ile ifade edilir.

$$[\mathbf{G}]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (3.12)$$

$[\mathbf{G}]$ matrisinin evriği için Denklem 3.11 ile elde edilen eşitlikte Denklem 3.13'deki dönüşümler yapılarak; $[\mathbf{G}]^{-1}$ matrisi ve $\{\mathbf{d}_{\text{ex}}\}$ yer değiştirme vektörü, Denklem 3.10'da yerlerine konulursa $\{\mathbf{a}\}_x$ katsayılar vektörü, Denklem 3.14.a ile ve benzer şekilde y doğrultusu için $\{\mathbf{a}\}_y$ katsayılar vektörü, Denklem 3.14.b ile ifade edilir.

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\{\mathbf{a}\}_x = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.14.a)$$

$$\{\boldsymbol{\alpha}\}_y = \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.14.b)$$

Denklem 3.11’de $[\mathbf{G}]^{-1}$ için elde edilen eşitlik ve Denklem 3.14.a’da x doğrultusu için elde edilen $\{\boldsymbol{\alpha}\}_x$ katsayılar vektörü, Denklem 3.7’de matris formunda ifade edilen u yer değiştirme fonksiyonu eşitliğinde yerlerine konulursa, bu yer değiştirme fonksiyonu için Denklem 3.15’deki eşitlik elde edilir.

$$u = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Denklem 3.15’deki matris çarpımları yapılması halinde, x doğrultusundaki u yer değiştirme fonksiyonu için Denklem 3.16.a’daki eşitlik elde edilir. Benzer şekilde y doğrultusundaki v yer değiştirme fonksiyonu da Denklem 3.16.b’deki gibi elde edilir.

$$u = \frac{1}{2A} \left[(a_1 + b_1x + c_1y) u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y) u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y) u_3 \right] \quad (3.16.a)$$

$$v = \frac{1}{2A} \left[(a_1 + b_1x + c_1y) v_1 + (a_2 + b_2x + c_2y) v_2 + (a_3 + b_3x + c_3y) v_3 \right] \quad (3.16.b)$$

Elde edilen Denklem 3.16.a ve 3.16.b’deki eşitlikler, Denklem 3.17’deki dönüşümler yapılarak düzenlenirse; u ve v yer değiştirme fonksiyonları için aranan bağıntılar, sırasıyla Denklem 3.18.a ve 3.18.b’deki gibi elde edilir.

$$N_1 = N_1(x, y) = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$N_2 = N_2(x, y) = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2x + c_2y) \quad (3.17)$$

$$N_3 = N_3(x, y) = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3x + c_3y)$$

$$u = u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \{\mathbf{d}_{ex}\} \quad (3.18.a)$$

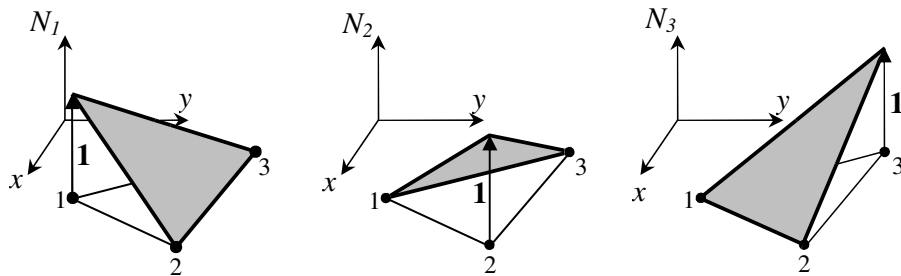
$$v = v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\} \{\mathbf{d}_{ey}\} \quad (3.18.b)$$

Denklem 3.17'deki eşitliklerde doğrusal üçgen elemanlar için düğüm noktalarının koordinatları cinsinden x ve y 'ye bağlı olarak elde edilen fonksiyonlara şekil fonksiyonları ya da bir başka deyişle enterpolasyon fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar, Denklem 3.18.a ve 3.18.b'de görüldüğü üzere eleman içindeki gerçek yer değiştirme değişiminin, düğüm noktası yer değiştirmelerinden enterpolasyon yoluyla elde edilmesini sağlarlar. Yer değiştirme fonksiyonları ve şekil fonksiyonları arasındaki bu ilişki, her iki doğrultudaki yer değiştirme fonksiyonunu da içerecek şekilde Denklem 3.19'daki ya da daha genel bir ifadeyle Denklem 3.20'deki gibi elde edilir. Böylece eleman içindeki yer değiştirme değişimlerinin düğüm noktalarındaki yer değiştirme bileşenleri cinsinden ifade edilmesini sağlayan bağıntı, Denklem 3.20 ile elde edilmiş olur.

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_{ex}\} \\ \{d_{ey}\} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\{\bar{U}(x,y)\} = [N(x,y)]\{d_e\} \quad (3.20)$$

Denklemlerde N_i ile gösterilen i düğüm noktasındaki yer değiştirme bileşenlerine ait şekil fonksiyonu, öyle elde edilir ki; bu düğüm noktasının x_i ve y_i koordinatları Denklem 3.17'de bu fonksiyonlar için verilen eşitliklerde yerlerine konulduğunda, $N_1(x_1, y_1) = 1$, $N_2(x_2, y_2) = 0$ ve $N_3(x_3, y_3) = 0$ değerleri elde edilir. Yani bir şekil fonksiyonu N_i , i düğüm noktasında bir, geri kalan düğüm noktalarında sıfır değerini almaktadır. Ayrıca bir elemanın düğüm noktaları da dâhil olmak üzere, herhangi bir noktadaki şekil fonksiyonlarının toplam değeri birdir. Bu doğrultuda bu fonksiyonların eleman içindeki değişimi, Şekil 3.2'deki gibi olur.



Şekil 3.2 Doğrusal üçgen elemanlara ait şekil fonksiyonları [28]

3.1.2. Yer Değiştirme – Birim Şekil Değiştirme İlişkisinin Kurulması

Eleman davranış denklemlerinin oluşturulabilmesi için izlenen prosedürün ikinci aşamasında; iç kuvvetlerin yaptığı işin tanımlanmasında gerekli olan birim şekil değiştirme bileşenleri, bir önceki aşamada elde edilen yer değiştirme fonksiyonları ve yer değiştirme – birim şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişkilerden yararlanmak suretiyle elde edilirler. Düzlem elastisite problemleri için bu büyüklükler arasındaki bağıntılar, sadece doğrusal terimler dikkate alınarak Denklem 2.4 ile verilmişti. Denklem 2.4’deki bu bağıntılar, matris formunda düzenlenirse; elemana ait $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ birim şekil değiştirme vektörü, Denklem 3.21’deki gibi elde edilir.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (3.21)$$

Denklem 3.20’de $\{\boldsymbol{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ yer değiştirme vektörü için elde edilen eşitlik, Denklem 3.21’de yerine konulursa; birim şekil değiştirme bileşenleri de problemin bilinmeyenleri olan düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden Denklem 3.22’deki gibi ifade edilir.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}][\mathbf{N}]\{\mathbf{d}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}_e\} \quad (3.22)$$

Doğrusal üçgen elemanlar için şekil fonksiyonları, Denklem 3.17’deki eşitliklerden görüldüğü üzere hem x hem de y doğrultusunda doğrusaldır. $[\mathbf{C}]$ matrisi ise, Denklem 3.21’de belirtildiği üzere diferansiyel operatörlerden oluşmaktadır. $[\mathbf{C}]$ ve $[\mathbf{N}]$ matrislerinin çarpımı ile elde edilen $[\mathbf{B}]$ matrisi ise, şekil fonksiyonlarının birinci değişim terimlerini içermekte ve sabit terimlerden oluşmaktadır. Dolayısıyla $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ birim şekil değiştirme vektöründe değişkenler bulunmaz, yalnızca sabit terimler bulunur [16]. Bu da doğrusal üçgen eleman içinde şekil değiştirmenin ve dolayısıyla gerilmenin sabit olacağını göstermektedir. Bu nedenledir ki, bu üçgen elemanlar yerli literatürde “Sabit Şekil Değiştirme Üçgeni” veya “Sabit Gerilme Üçgeni”, yabancı literatürde ise “Constant Strain Triangle” veya “Constant Stress Triangle” olarak adlandırılırlar.

Eleman içinde şekil değiştirmenin ve gerilmenin sabit olması, bu elemanların daha önce de belirtilen sakıncalarının kaynağını oluşturmaktadır. Çünkü gerçekte, gerilme ya da şekil değiştirmeler yapı boyunca değişirler ve bu değişim, ancak diğer sonlu eleman tiplerinin oluşturduğu ağ modellerine nazaran genellikle daha fazla sayıda doğrusal üçgen elemanın oluşturduğu bir ağ yapısı ile elde edilebilir.

3.1.3. Gerilme – Birim Şekil Değiştirme İlişkisinin Kurulması

Toplam potansiyel enerji bahsinde dış kuvvetlerin etkisinde dengede bulunan bir cisimde bu kuvvetler nedeniyle oluşan iç kuvvetlerin yaptığı iş, gerilmeler ve bu gerilmelere tekabül eden şekil değiştirmelerin fonksiyonu olarak tanımlanmış ve bir önceki aşamada bu fonksiyonun şekil değiştirme bileşenleri, düğüm noktası bilinmeyenleri cinsinden Denklem 3.22 ile ifade edilmişti. İç kuvvetlerin yaptığı işin tanımlanabilmesi için bu aşamada, gerilme bileşenleri de gerilme - birim şekil değiştirme ve birim şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkilerinden yararlanarak, düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilmiştir. Düzlem elastisite problemleri için Bölüm 2’de verilen bünye bağıntıları, matris formunda düzenlenirse; E elastisite modülü, ν poisson oranı ve $[D]$ elastisite matrisi olmak üzere, düzlem gerilme hali için Denklem 3.23, düzlem şekil değiştirme hali için Denklem 3.24 elde edilir.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\epsilon\} \quad (3.23)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\epsilon\} \quad (3.24)$$

Bir önceki aşamada $\{\epsilon\}$ birim şekil değiştirme vektörü için elde edilen Denklem 3.22’deki eşitlik, Denklem 3.23 veya 3.24’de yerine konulursa; her iki durum için de gerilme bileşenleri, düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden Denklem 3.25 ile elde edilir.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{d}_e\} \quad (3.25)$$

3.1.4. Potansiyel Enerji İlkeleri Yardımıyla Denge Denklemlerinin Eldesi

Eleman davranış denklemlerinin elde edilmesi için izlenen prosedürün son aşamasında, söz konusu davranış denklemleri, belirtildiği üzere potansiyel enerji prensiplerinden yararlanılarak elde edilir. Bir elemanın toplam potansiyel enerjisi, eleman üzerine etkiyen iç ve dış kuvvetlerin yaptıkları işin toplamı olarak Denklem 3.1 ile ifade edilmişti. Bu elemandaki iç kuvvetlerin işi ise, gerilme ve bu gerilmelere tekabül eden birim şekil değiştirmelerin bir fonksiyonu olarak tanımlanmış; gerilme – birim şekil değiştirme ve birim şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkilerinden yararlanılarak Denklem 3.3 ile yer değiştirmelerin bir fonksiyonu olarak ifade edilmişti. Elemanın sahip olduğu bu birim şekil değiştirme enerjisi, gerilmeler ve birim şekil değiştirmeler cinsinden Denklem 3.26'daki gibi ifade edilebilir.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{hacim}} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv \quad (3.26)$$

Bu denklemde $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ birim şekil değiştirme vektörü için Denklem 3.22'deki, $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ gerilme vektörü için ise Denklem 3.25'deki eşitlikler yerlerine konulursa; iç kuvvetlerin yaptığı iş, problemin bilinmeyen parametreleri olan düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden Denklem 3.27'deki gibi elde edilir.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{hacim}} \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{d}_e\} dv \quad (3.27)$$

Denklem 3.2'de genel olarak $W=P.\Delta$ ile tanımlanan dış kuvvetlerin yaptığı iş ise; eleman üzerine etkiyen dış kuvvetlerin, X kütle kuvvetleri ve \bar{X} yüzey kuvvetleri olarak ayrılması halinde Denklem 3.28 ile ifade edilir.

$$W_e = - \int_{\text{hacim}} \{\bar{U}\}^T \{\mathbf{X}\} dv - \int_{\text{yüzey}} \{\bar{U}\}^T \{\bar{X}\} ds \quad (3.28)$$

Bu denklemde elemanın x ve y doğrultularındaki u ve v yer değiştirme fonksiyonlarını içeren genel yer değiştirme vektörü $\{\bar{U}\}$ için Denklem 3.20'deki eşitliğin, Denklem 3.28'de yerine konulmasıyla dış kuvvetlerin yaptığı iş, Denklem 3.29'daki gibi elde

edilir. Böylece iç kuvvetlerin işinde olduğu gibi, dış kuvvetlerin işi de düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilmiş olur.

$$W_e = - \int_{\text{hacim}} \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{X}\} dv - \int_{\text{yüzey}} \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{X}}\} ds \quad (3.29)$$

Denklem 3.27 ile iç kuvvetlerin işi için, Denklem 3.29 ile dış kuvvetlerin işi için elde edilen eşitliklerin, Denklem 3.1 ile verilen toplam potansiyel enerji ifadesinde yerlerine konulmasıyla, Denklem 3.30 elde edilir ve böylece elemanın sahip olduğu toplam potansiyel enerji de yine bu elemanın sahip olduğu düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilmiş olur.

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_v \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}_e\} dv - \int_v \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{X}\} dv - \int_s \{\mathbf{d}_e\}^T [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{X}}\} ds \quad (3.30)$$

Sahip olduğu toplam potansiyel enerji yukarıdaki gibi ifade edilen elemanların bir araya gelmesiyle oluşan sistem, denge konumunda minimum enerjiye sahiptir. Yani sistemin toplam potansiyel enerjisi, iç sürekliliği ve sınır koşullarını sağlayan bir yer değiştirme takımı için minimumdan geçer. Denge konumunu sağlayan bu yer değiştirme takımı, problemin bilinmeyen parametreleri olan düğüm noktası yer değiştirme bilinmeyenlerini içermekte olup; Denklem 3.5'de $\{\Delta\}$ vektörü ile gösterilmiştir. Sistemin tümü için bu şekilde ifade edilen minimum potansiyel enerji prensibi, sistemi oluşturan elemanlar için de geçerlidir ve Denklem 3.31 ile ifade edilir.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\mathbf{d}_e\}} = \left[h \int_a [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy \right] \{\mathbf{d}_e\} - \left[h \int_a [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{X}\} dx dy + \int_s [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{X}}\} ds \right] = 0 \quad (3.31)$$

Böylece doğrusal üçgen (CST) elemanlarına ait denge denklemi Denklem 3.31 ile elde edilmiş olur. Bu denklem, Denklem 3.32.a ve 3.32.b'deki düzenlemeler yapılarak tekrar yazılırsa; denge denkleminin Denklem 3.33'deki gibi rijitlik terimleri, yer değiştirme bileşenleri ve yük bileşenleri arasındaki bilinen bağıntıya dönüştüğü görülür.

$$[\mathbf{K}_e] = h \int_{\text{alan}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy \quad (3.32.a)$$

$$\{\mathbf{f}_e\} = h \int_{\text{alan}} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{X}\} dx dy + h \int_{\text{yüzey}} [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{X}}\} ds \quad (3.32.b)$$

$$[\mathbf{K}_e]\{\mathbf{d}_e\} = \{\mathbf{f}_e\} \quad (3.33)$$

$[\mathbf{K}_e]$ eleman rijitlik matrisi, $\{\mathbf{f}_e\}$ elemanın yük vektörü olmak üzere, Denklem 3.33 ile son halini alan eleman davranış denklemi, sistemdeki mevcut her eleman için oluşturularak; eleman davranış denklemlerinin elde edilmesi aşaması tamamlanır. Ardından Bölüm 2.4.6’da özetlenen analiz aşamalarının üçüncüsü olan “Sistem Davranış Denkleminin Elde Edilmesi” aşamasında, elde edilen eleman denklemleri elemanlar arası yer değiştirme sürekliliğini sağlayacak şekilde toplanarak; tüm yapıya ait davranış denklemi elde edilir. Analizin bir sonraki “Yer Değiştirme Bilinmeyenlerinin Hesaplanması” aşamasında ise, elde edilen sistem davranış denklemi, bilinen yer değiştirme sınır koşullarını sağlayacak şekilde değiştirildikten sonra; bilinmeyenleri düğüm noktası yer değiştirmeleri olan doğrusal bir cebirsel denklem takımı elde edilir. Global koordinatlardaki bu denklem takımı, $[\mathbf{K}_{sg}]$ sistem rijitlik matrisi, $\{\Delta_{sg}\}$ yer değiştirme bilinmeyenleri vektörü ve $\{\mathbf{P}_{sg}\}$ sistem yük vektörü olmak üzere, Denklem 3.34’deki gibidir.

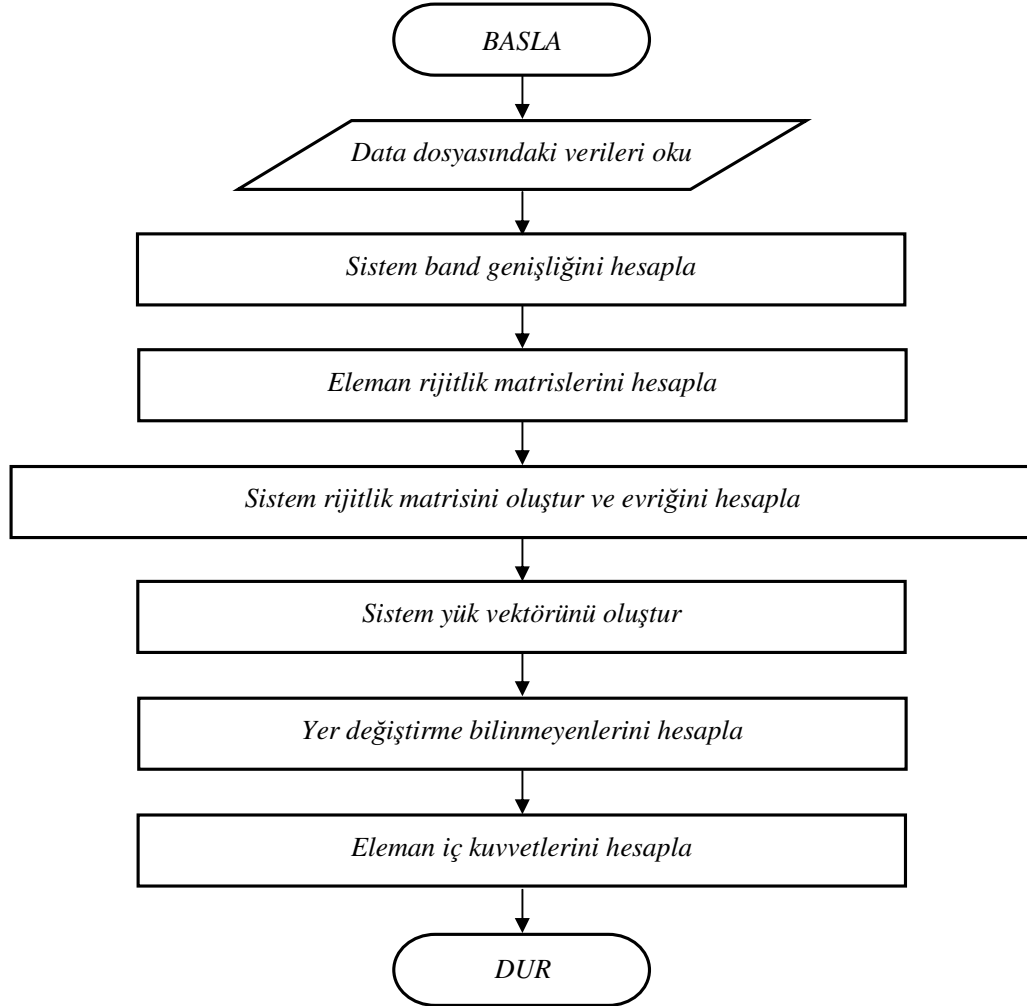
$$[\mathbf{K}_{sg}]\{\Delta_{sg}\} = \{\mathbf{P}_{sg}\} \quad (3.34)$$

Bu denklem takımının çözümü ile, sistemin tümüne ait global koordinatlardaki yer değiştirme bilinmeyenleri elde edilir ve son olarak “Eleman Gerilmelerinin Hesabı” aşamasında, sisteme etkiyen dış yükler nedeniyle elemanlarda oluşan gerilmeler, gerilme – yer değiştirme ilişkisini veren Denklem 3.25’deki eşitlik ile elde edilir. Doğrusal üçgen elemanlar için bu denklem ile eleman gerilmelerinin elde edilmesi sırasında koordinat dönüşümüne ihtiyaç yoktur. Çünkü bu elemanlarda global koordinatlardan lokal koordinatlara geçiş, ekstra bir kolaylık sağlamaz. Denklem 3.25’in sistemde mevcut her eleman için uygulanmasıyla tüm kuvvet bilinmeyenleri de elde edilmiş olur ve analiz tamamlanır.

3.2. BİLGİSAYAR PROGRAMI

Düzlem elastisite problemlerinin bilgisayar ortamında FEM ile analizini gerçekleştirmek amacıyla, Öztörün tarafından geliştirilen TUNAL [1] programının hali hazırda çerçeve ve kafes kiriş tipi elemanlardan oluşan sistemlerin iki boyutlu analizini

yapan bölümünde modüller oluşturulmuştur. Bu modüller, düzlem elastisite problemlerinin Bölüm 3.1’de formülasyonu elde edilen doğrusal üçgen (CST) elemanlardan oluşan ağ modelleri ile analizini gerçekleştirmektedir. Oluşturulan bu modüller ve yapılan bazı değişikliklerle kaynak programın tez kapsamındaki hali, CST olarak isimlendirilmiştir. Program, FORTRAN programlama diliyle hazırlanmış 1258 satırlık program koduna sahiptir. Kullanıcı tarafından oluşturulan bir adet data dosyasındaki verileri kullanarak; sistemin analizini gerçekleştiren program, iki adet sonuç dosyası üretmektedir. Doğrusal – elastik sınırlar içinde homojen ve izotrop malzeme kabulüyle kafes kiriş, çerçeve ve / veya CST elemanlarından oluşan yapı sistemlerinin iki boyutlu analizini yapan bu programın akış şeması, Şekil 3.3’deki gibidir.



Şekil 3.3 Programın akış şeması

3.2.1. Data Dosyası

Data dosyası, incelenen sistemin analizi için gerekli parametrelerin bulunduğu ortam olup; sistem, programa bu ortamda bulunan veriler ile tanıtılmaktadır. Kullanıcı tarafından herhangi bir editör vasıtasıyla oluşturabilen bu dosya, program ile aynı klasör içerisinde bulunmalıdır. Dosyada sistemi oluşturan elemanlara ait tip bilgisi, düğüm noktalarının numara ve koordinat bilgileri, sınır şartı bilgileri, konsantre yük bilgileri ile elemanların bağlandığı düğüm noktaları ve sahip oldukları malzeme çeşitlerine ait bilgiler depolanmaktadır. Takip kolaylığı açısından ve olası bir hatanın tespiti açısından bloklar halinde yazılan data dosyası, şu satır ve bloklardan oluşur:

a) *Başlık Satırı:* Data dosyasının ilk satırındadır. Programda BASLIK alfasayısal değişkeni ile tanımlanan bu satır, genellikle analizi yapılacak sistemi tanımlayıcı bir cümleden oluşur.

b) *Tip Bilgisi Satırı:* Data dosyasının ikinci satırındadır. Programda TIP alfasayısal değişkeni ile tanımlanan bu satır, sistemi oluşturan elemanların türü hakkında bilgi verir. Program kafes kiriş, çerçeve ve CST elemanlarından oluşan sistemlerin iki boyutlu analizini yapabildiğinden; bu satıra TIP değişkenine karşılık olarak TRU, FRA, CST ya da sistem farklı tipteki elemanların kombinasyonundan oluşuyorsa KOM yazılır. Girilen bu tip bilgisine bağlı olarak program tarafından nokta serbestlik sayısı, eleman düğüm noktası sayısı ve eleman malzeme özellik sayısı ataması yapılır.

c) *Nokta Bilgisi Bloğu:* Bu blokta programa, sistemin sahip olduğu düğüm noktalarının sayısı, numaraları ve koordinat bilgileri tanıtılır. Bloğun ilk satırında blok ismi ve ikinci satırında toplam düğüm noktası sayısı belirtilir. Daha sonraki satırlar ise, her düğüm noktası için ayrı bir satırda belirtilmek üzere; sırasıyla düğüm noktasının numarası, x koordinatı ve y koordinatı bilgilerini içerir.

d) *Sınır Şartı Bloğu:* Bu blokta, programa sistemin sahip olduğu sınır şartları tanıtılır. Blokta sadece serbestlik sınırlaması yapılan düğüm noktalarına ait bilgiler bulunur. Yani hiçbir serbestlik sınırlaması yapılmayan bir düğüm noktası, bu blokta belirtilmez. Bir düğüm noktasında herhangi bir serbestliğin sınırlandırılması halinde, bu blokta bu düğüm noktasının sınırlandırılmış serbestliğine karşılık gelen alana "1",

sınırlandırılmamış serbestliğine karşılık gelen alana “0” yazmak suretiyle sınır şartı tanımlaması yapılır. Bloğun ilk satırında blok ismi ve ikinci satırında sistemde sınır şartına sahip toplam düğüm noktası sayısı belirtilir. Daha sonraki satırlarda sırasıyla sınırlandırılan düğüm noktasının numarası, x ve ardından y yönlerindeki sınır şartı durumu ve nokta eğer bir zorlanmış dış yer değiştirme etkisinde ise sırasıyla bu yer değiştirmenin x ve y yönlerindeki değerleri belirtilir. Bu bilgiler, sistemde sınır şartına sahip her düğüm noktası için ayrı bir satırda olacak şekilde, belirtilen sırayla girilerek blok tamamlanır.

e) Yük Bilgisi Bloğu: Bu blokta ise, programa sistemin sahip olduğu yükler tanıtılır. Dış yüklerin açıklık yükü olması halinde, bunlar öncelikle düğüm noktası yüklerine dönüştürülür ve programa düğüm noktası yükleri olarak tanıtılır. Bloğun ilk satırında blok ismi ve ikinci satırında sistemdeki mevcut yüklü düğüm noktası sayısı belirtilir. Daha sonraki satırlarda ise, sırasıyla yükün etkidiği düğüm noktasının numarası, x ve ardından y yönündeki doğrusal yük bileşenleri belirtilir. Eğer sistemde çerçeve elemanlar mevcut ise ve de düğüm noktalarında açısız yük bileşenleri bulunuyorsa, bu değerler de son yük bileşeni olarak girilir. Bu bilgiler, sistemde mevcut her yüklü düğüm noktası için ayrı bir satırda olacak şekilde, belirtilen sırayla girilerek blok tamamlanır.

f) Eleman Bilgisi Bloğu: Programa bu blokta, sistemin sahip olduğu elemanlar ve bu elemanlara ait bilgiler tanıtılır. Bloğun ilk satırındaki blok ismini tanımlayan değişkene karşılık olarak; kafes giriş tipi elemanlar için TRU, çerçeve tipi elemanlar için FRA ve CST elemanları için CST yazılır. Eğer sistemde birden fazla türde eleman varsa, her eleman türü için ayrı bir eleman bilgisi bloğu oluşturulur. İkinci satırda ise, bloğun ait olduğu eleman türünde sistemdeki mevcut eleman sayısı belirtilir. Daha sonraki satırlarda da sırasıyla elemanın numarası, sahip olduğu malzeme çeşidi numarası ve bağlandığı düğüm noktalarının numaraları belirtilir. Bu bilgiler, bloğun ait olduğu eleman türünde sistemdeki mevcut her eleman için ayrı bir satırda olacak şekilde girilerek blok tamamlanır.

g) Malzeme Bilgisi Bloğu: Bu blokta programa, sistemdeki elemanların sahip olduğu malzeme ve kesit özellikleri tanıtılır. Bloğun ilk satırı, sistemin kafes giriş tipi

elemanlardan oluşması halinde TRM, çerçeve tipi elemanlardan oluşması halinde FRM, CST elemanlarından oluşması halinde ise CSM ile tanımlanır. İkinci satırda belirtilen eleman tipine ait malzeme çeşidi sayısı girilir. Daha sonraki satırlarda malzeme özellik numarası ve malzemenin ait olduğu eleman tipine bağlı olarak; elastisite modülü, kesit alanı, atalet momenti, kesit kalınlığı ve poisson oranı bilgilerinden gerekli olanları girilir. Eğer analizi yapılan sistem, birden fazla tipte eleman grubu içeriyorsa; her tip için ayrı bir malzeme bilgisi bloğu oluşturulmalıdır.

3.2.2. Programın İşleyişi

3.2.2.1. Data Dosyasındaki Verilerin Okunması

Program, MAIN PROGRAM olarak adlandırılan bir ana program, BOYUT ve BODY olarak adlandırılan iki büyük alt program ve on beş küçük alt programdan oluşmaktadır. Ana programın ilk aşamasında program içerisinde kullanılacak değişkenlere ilişkin tür tanımlamaları yapıldıktan sonra; ikinci aşamada data dosyasına depolanan veriler okunur. Bu aşamada data dosyasından formatsız olarak okutulan veriler, program içerisinde daha sonradan kullanılmak üzere ilgili dizilere kaydedilirken; bir taraftan da programın sonuç dosyalarından OUT uzantılı dosyaya formatlı olarak yazdırılır.

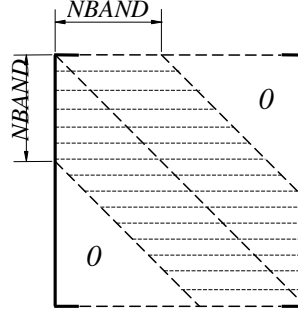
Veriler, formatsız okutulduğu için okunma sırasına dikkat edilmelidir. Başlık ve tip bilgisi satırlarının ardından Bölüm 3.2.1’de verilen sıra ile blok bilgiler okutulabilir. Ancak bloklar arasında mutlaka belirtilen sıranın takip edilmesi zorunlu değildir. Bloklar, kendi içlerindeki veri giriş sırasının değişmemesi kaydıyla farklı sıralarda da girilebilir.

3.2.2.2. Sistem Band Genişliğinin Hesaplanması

Köşegenin üstünde ve altında belli sayıdaki sıralarda sıfırdan farklı elemanları bulunan, diğer elemanları ise tamamen sıfır olan matrise “band matris” denir [29].

Simetrik, kare matrisler olan sistem rijitlik matrisleri, band matrislerdir. Sistemin analizi için gerekli olan rijitlik terimleri, bu matrislerde Şekil 3.4’de de görüldüğü üzere bir band zarfı içindedir. Gerçekte çoğu problemde, matrisin yarısından daha az bir kısmını oluşturan bu zarf, çözüm için yeterlidir.

Bandlı çözümlerde düğüm noktalarının numaralanması çok önemlidir. Çünkü band genişliği, direkt olarak düğüm noktalarının numaralanma şekline bağlı olup; NBAND değeri, problemin yarım band genişliğini; MF değeri, sistemin sahip olduğu elemanlarda düğüm noktalarının serbestlik numaralarındaki maksimum farkı göstermek üzere ($NBAND = MF + 1$) eşitliği ile elde edilir.



Şekil 3.4 Yarım band genişliği

Programda NBAND değeri, ana program tarafından boyut uyarlaması yapmak üzere çağrılan BOYUT alt programında hesaplanır. Bu alt program öncelikle her eleman için düğüm noktalarına ait serbestlik numaralarını belirler ve bunları IJ(K) isimli bir diziye kaydeder. Ardından BAND alt programı ile incelenen eleman için oluşturulan IJ(K) dizisi kullanılarak; ($NBAND = MF + 1$) eşitliği ile NBAND değeri hesaplanır. Bu işlem, her eleman için tekrarlanır. Bir eleman için elde edilen NBAND değeri, bir önceki elemana ait değer ile kıyaslanarak; bu iki değerden büyük olanı NBAND değişkenine atanır. Her seferinde büyük değer alınması ile eleman sayısı kadar çalışan döngü sonucunda maksimum NBAND değeri, yani sistemin yarım band genişliği elde edilir. Elde edilen bu değer ile sistem rijitlik matrisi, daha küçük bir alana depolanacak ve böylece analiz için yapılacak işlem hacmi ile harcanacak süre azaltılarak; bilgisayarın hafızası optimum düzeyde kullanılmış olacaktır.

3.2.2.3. Eleman Rijitlik Matrislerinin Hesaplanması

Bu aşamada, sistemi oluşturan elemanlara ait global koordinatlardaki rijitlik matrisleri elde edilir. Programda eleman rijitlik terimlerinin hesabı ve analizin tamamlanması için geri kalan tüm işlemler, BODY alt programında gerçekleştirilir. Bu alt programda rijitlik terimleri, sistemdeki mevcut eleman sayısı kadar çalışan bir DO döngüsüyle elde edilir. Sistemin farklı türde elemanlardan oluşması halinde, her eleman tipi için ayrı bir döngü çalıştırılır. Döngüde incelenen eleman için öncelikle verilerin okunması

aşamasında dizilere depolanan eleman malzeme özellik ve düğüm noktası koordinat bilgileri bu aşamada değişkenlere atanır. Ardından elemanın sahip olduğu düğüm noktalarındaki yer değiştirme serbestlikleri numaralandırılır. Elemana ait bu gerekli bilgilerin elde edilmesinin ardından, elemanın kafes kiriş tipi eleman olması halinde TR2G alt programı ile, çerçeve tipi eleman olması halinde FR2G alt programı ile, düzlem gerilme / şekil değiştirme tipi eleman olması halinde ise CSTG alt programı ile elemana ait rijitlik terimleri hesaplanır.

Tez kapsamında oluşturulan CSTG alt programı, düzlem elastisite problemlerinin analizinde kullanılacak CST elemanlarının rijitlik terimlerinin hesabını yapar. Bu alt program da bir alt programlar grubundan oluşur. İlk olarak DBMAT alt programı ile Denklem 3.32.a'daki B, D ve BT matrisleri elde edilir. DBMAT alt programında öncelikle, elemana ait düğüm noktalarının koordinatları kullanılarak B matrisinin b_i ve c_i terimleri bulunur. Ardından bu matrisin transpozesi alınarak, BT ismi ile kaydedilir ve son olarak D elastisite matrisinin terimleri elde edilir. Denklem 3.23 ve Denklem 3.24'den görüldüğü üzere, iki düzlemsel hal için elastisite matrisinin terimleri farklıdır. Bu ayrımı yapmak amacıyla, LTUR isimli bir değişken tanımlanmıştır. Bir BLOK IF yapısıyla değişkenin "1" değerini alması halinde düzlem gerilme; "2" değerini alması halinde düzlem şekil değiştirme haline ait terimler hesaplanır ve elastisite matrisinin terimleri tek tek atanarak DBMAT tamamlanır.

Elde edilen B, D ve BT matrisleri Denklem 3.32'deki sıra gözetilerek, iki boyutlu matrislerin çarpımını yapan CARPIM alt programı ile çarpılır ve son olarak bu üç matrisin çarpımını ifade eden 6x6'lık SEGEC matrisinin bütün terimleri, eleman yüzey alanı ve kalınlık değerleriyle çarpılarak; SE eleman rijitlik matrisi elde edilir.

3.2.2.4. Sistem Rijitlik Matrisi Oluşturulması ve Evriğinin Hesaplanması

Programın bu aşamasında öncelikle sistem rijitlik matrisi oluşturulur. Bilindiği üzere, herhangi bir yapı sistemine ait sistem rijitlik matrisi, o sistemde bulunan tüm elemanların katkısıyla oluşur. Bu katkı, her eleman için elde edilen rijitlik terimlerinin söz konusu matrise eklenmesiyle sağlanır. Programda eleman rijitlik terimlerinin TR2G, FR2G veya CSTG alt programlarından biriyle elde edilmesinin ardından yine aynı döngü içinde bulunan bir başka alt program ADSTIF çağrılır. Bu alt program, incelenen

elemana ait rijitlik terimlerini, sistem rijitlik matrisine yerleştirmektedir. Döngü ilk kez çalıştığında birinci elemana ait SE eleman rijitlik matrisi terimleri ST sistem rijitlik matrisine kaydedilir. Döngünün sistemdeki mevcut eleman sayısı kadar çalışması ile ST sistem rijitlik matrisi elde edilir. Ancak döngü sonucunda band matris olan sistem rijitlik matrisinin sadece band zarfının üst yarısındaki terimler elde edilir. Çünkü bu matris, simetrik bir matristir ve zarfın bir yarısındaki terimler sistemin analizi için yeterlidir.

Sistem rijitlik matrisinin oluşturulmasında dikkat edilecek tek nokta, elemandan gelen rijitlik terimlerinin sisteme ait matriste doğru alana yerleştirilmesidir. Bu nedenle yerleştirme işlemi, serbestlik numaralarına göre yapılmaktadır.

Programın bir sonraki adımında, ST matrisinin evriği hesaplanır. Bu işlem programdaki mevcut INVERS alt programıyla gerçekleştirilir. Ancak INVERS alt programı, simetrik, kare matrislerin evriğini hesaplar. Bir önceki aşamada elde edilen ST matrisi ise, sadece band zarfın üst yarısındaki terimleri içeren dikdörtgen bir matristir. Bu nedenle bandsız çözüm için öncelikle bu matrisin simetrik, kare matris haline çevrilmesi gereklidir.

Orijinal programda bu matrisin evriği, bandsız ve bandlı çözüm yapılarak; iki şekilde elde edilmektedir. CST programında ise, sadece bandsız çözüm yapılmaktadır. Bandsız çözüm için ilk adımda, sınır şartı bilgileri kullanılarak sistemin tutulu serbestliklerinin numaraları ve sayısı (KKK) bulunur. Bu sayı sistemin toplam serbestlik sayısı (NDEPRE)'den çıkarılarak sistemin serbestlik derecesi (III) bulunur. Ardından bir başka DO döngüsüyle, tutulu olmayan serbestlik numaraları bulunur. Böylece hesaplanacak evrik kare matrisin boyutları ile satır ve sütun numaraları elde edilir.

Bir sonraki adımda (NDEPRE x NDEPRE) boyutlarında BKARE isimli bir matris tanımlanır. Bu matrisin terimleri, bir önceki aşamada elde edilen ST matrisinden alınır. Bir DO döngüsüyle, BKARE matrisinin üst üçgen terimleri yerleştirilir. Başka bir DO döngüsü ile de simetriden yararlanarak alt üçgen terimleri yerleştirilir. Ancak bu matris, diyagonalde sıfır terimler içeren, sınır şartları tanımlanmamış sistem rijitlik matrisidir. Determinantı sıfır olacağından evriği de hesaplanamaz. Bu nedenle programda AKARE

isimli bir matris tanımlanır. Bu matris, sistemin sadece bilinmeyen serbestliklerine karşı gelen rijitlik terimlerini içeren sistem rijitlik matrisidir. Bu matrisin terimleri, BKARE matrisinden alınır. Bunun için bir DO döngüsüyle, BKARE matrisinden sadece bilinmeyen serbestliklere karşı gelen terimler çekilir ve yerleştirilir. AKARE'nin elde edilmesinin ardından INVERS altprogramı çağrılarak; oluşturulan bu simetrik, kare matrisin evriği hesaplanır.

3.2.2.5. Sistem Yük Vektörünün Oluşturulması

Programın bu aşamasında sistem yük vektörü oluşturulur. Bu vektör, analizi yapılan sistem üzerine etkiyen tüm yüklerin konsantre düğüm noktası yükleri olarak tanıtıldığı vektördür. Vektörün her bir terimi, ait olduğu serbestlik doğrultusunda sisteme uygulanan yük değerini verir. Bu nedenle yük vektörünün oluşturulmasında öncelikle yüklü serbestlik numarası ve ilgili yük değerinin bilinmesi gereklidir.

Yüklü serbestlik numaraları, yüklü nokta numaralarını içeren NYUKLU dizisi kullanılarak elde edilir. Bu serbestliğe karşılık yük değeri ise nokta yükü değerlerini içeren R dizisinden alınır. (Bu iki dizi, data okunması aşamasında oluşturulmuş dizilerdir.) Ardından bu yük değeri, sistem yük vektöründe ilgili serbestliğe ait alana eklenir. Bu işlemlerin, sistemdeki mevcut nokta yükü sayısı kadar çalışan bir DO döngüsü içinde tekrarlanması ile YUKVEK sistem yük vektörü elde edilir.

3.2.2.6. Yer Değiştirme Bilinmeyenlerinin Hesaplanması

Programın bu aşamasında, sistem yer değiştirme vektörü elde edilir. Bu vektör, analizi yapılan problemin bilinmeyenleri olan düğüm noktalarına ait yer değiştirme bilinmeyenlerini içermektedir. Orijinal programda bantlı çözüm neticesinde elde edilen bu vektör, CST programında bandsız çözüm ile Denklem 3.35'den yararlanılarak elde edilir.

$$\{\Delta_{sg}\} = [K_{sg}]^{-1} \{P_{sg}\} \quad (3.35)$$

Denklemden $\{\Delta_{sg}\}$ sistem yer değiştirme vektörünü, $[K_{sg}]^{-1}$ sistem rijitlik matrisinin evriğini ve $\{P_{sg}\}$ sistem yük vektörünü göstermektedir. Bunların her üçü de sadece bilinmeyen yer değiştirmelere yani tutulu olmayan serbestliklere karşı gelen terimleri

içermelidir. Ancak programda bir önceki aşamada elde edilen $\{\mathbf{P}_{sg}\}$ vektörüne karşılık gelen YUKVEK vektörü, tüm serbestliklere ait terimleri içerir. Bu nedenle programın bu aşamasında bir ara işlemle bu vektörün sadece bilinmeyen yer değiştirmelerine ait terimler çekilir ve YKISA isimli bir vektöre kaydedilir. Son olarak, $[\mathbf{K}_{sg}]^{-1}$ 'e karşılık gelen AKARE evrik matris ile YKISA vektörü, Denklem 3.35'e göre çarpılır ve DKISA sistem yer değiştirme vektörü terimleri elde edilir.

3.2.2.7. Eleman İç Kuvvetlerinin Hesaplanması

Programın bu son aşamasında, düğüm noktalarına etkiyen yükler neticesinde sistemi oluşturan her elemanda meydana gelen iç kuvvet değerleri hesaplanır.

Herhangi bir yapı sisteminin statik analizi sonucunda elde edilecek eleman iç kuvvetlerinin, elemana ait lokal koordinat sisteminde hesaplanması gerekir. Çünkü statik analizin devamında yapılacak kesit tayin ve tahkik hesapları, lokal koordinatlardaki değerler göre yapılır. Bu nedenle, sistemin kafes kiriş ya da çerçeve tipi elemanlardan oluşması halinde, programda öncelikle koordinat dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm, Denklem 3.36'ya göre yapılır.

$$\{\Delta_{el}\} = [\mathbf{R}]^T \{\Delta_{eg}\} \quad (3.36)$$

Denklemden $[\mathbf{R}]^T$ elemana ait rotasyon matrisinin transpozesidir. Bu matrisin terimleri, elemanın kafes kiriş tipi eleman olması halinde TR2 alt programı, çerçeve tipi eleman olması halinde ise, FR2 alt programı ile elde edilir. $\{\Delta_{eg}\}$ ise, global koordinatlarda eleman yer değiştirme bilinmeyenlerini içeren vektördür. Vektör terimleri, sistem yer değiştirme vektöründen elemana ait olanların çekilmesiyle elde edilir. $\{\Delta_{el}\}$ ise, lokal koordinatlardaki eleman yer değiştirme bilinmeyenlerini içeren vektör olup, terimleri Denklem 3.36'ya göre çarpım yapan CARP alt programı ile hesaplanır.

$\{\Delta_{el}\}$ vektörünün Denklem 3.37'deki gibi, lokal koordinatlardaki eleman rijitlik matrisi $[\mathbf{K}_{el}]$ (Bu matrisin terimleri, elemanın kafes kiriş tipi eleman olması halinde TR2L alt programı, çerçeve tipi eleman olması halinde FR2L alt programı ile elde edilir.) ile

çarpılması sonucu, lokal koordinatlardaki aranan eleman iç kuvvet değerleri $\{\mathbf{P}_{el}\}$ ile elde edilir.

$$\{\mathbf{P}_{el}\} = [\mathbf{K}_{el}] \times \{\Delta_{el}\} \quad (3.37)$$

Sistemin düzlem gerilme / şekil değiştirme tipi elemanlardan oluşması halinde ise, koordinat dönüşümü ekstra bir kolaylık sağlamamaktadır. Bu nedenle bu elemanlar için gerilme bileşenleri, global koordinatlarda hesaplanır. Bu tip elemanlara ait gerilme bileşenlerinin elde edilmesi için oluşturulan döngüde öncelikle global koordinatlardaki sistem yer değiştirme vektöründen elemana ait yer değiştirme bilinmeyenleri çekilir ve UG isimli diziye kaydedilir. Ardından Bölüm 3.2.2.3'te açıklanan DBMAT alt programı çağrılır ve bu alt programdan elde edilen B matrisi, Denklem 3.38'deki $\{\Delta_{eg}\}$ 'ye karşılık gelen ve yer değiştirme terimlerini içeren UG vektörü ile çarpılarak; incelenen elemana ait birim şekil değiştirme vektörü $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ elde edilir.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \times \{\Delta_{eg}\} \quad (3.38)$$

Döngünün son aşamasında ise, DBMAT alt programından elde edilen D elastisite matrisi, birim şekil değiştirme vektörü $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ ile Denklem 3.39'daki gibi çarpılarak global koordinatlarda eleman için aranan gerilme bileşenleri elde edilir.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \times \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (3.39)$$

Eleman tipine göre Denklem 3.36 ile Denklem 3.37 veya Denklem 3.38 ile Denklem 3.39'daki işlemleri gerçekleştiren döngülerin aynı türdeki toplam eleman sayısı kadar çalışmasıyla tüm elemanlar için iç kuvvetler elde edilir ve program sonlandırılır.

3.3.3. Programın Sonuç Dosyaları

Program, data dosyasındaki verilere göre analizini gerçekleştirdiği her sistem için iki adet sonuç dosyası üretir ve bu dosyalara analiz sırasında tamamladığı her aşamanın sonuçlarını formatlı olarak yazdırır. Bu dosyalardan biri OUT, diğeri ise MAT uzantılıdır.

OUT uzantılı dosyaya, öncelikle incelen sistemi tanıtmak amacıyla data dosyasından okutulan veriler formatlı olarak yazdırılır. Bunlar, düğüm noktalarına ait koordinat, serbestlik ve yük bilgileri ile elemanlara ait nokta bağlantı ve malzeme özellik bilgileridir. Bu tanıtım bilgilerinin ardından elde edilen sistem yarım band genişliği, maksimum matris sayısı, toplam nokta sayısı ve problem için gereken satır sayısı değerleri ile analiz sonuçlarından düğüm noktası yer değiştirmeleri ve eleman iç kuvvet değerleri yazdırılır.

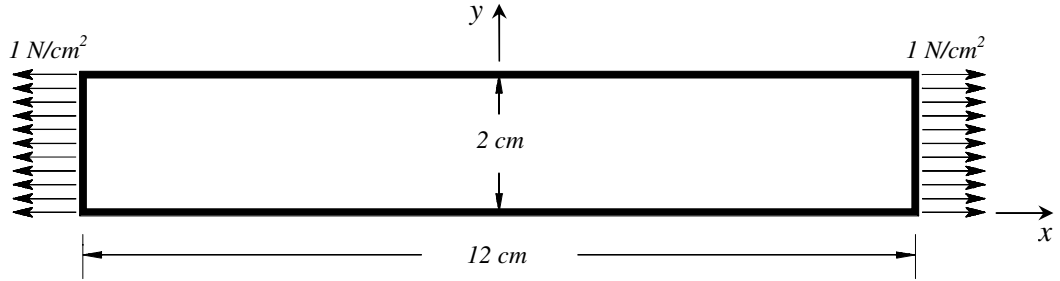
MAT uzantılı dosyaya ise, analiz sırasında oluşturulan matrisler yazdırılır. Bunlar her tip elemanın bulunduğu sistemlerin sonuç dosyalarında ortak olmak üzere sırasıyla, global koordinatlardaki eleman rijitlik matrisleri, sistem rijitlik matrisi, sistem rijitlik matrisinin evriği ve sadece kafes kiriş ve / veya çerçeve tipi elemanların bulunduğu sistemlerin sonuç dosyalarında olmak üzere eleman rotasyon matrisleri, global koordinatlardaki eleman yer değiştirme vektörleri, lokal koordinatlardaki eleman rijitlik matrisleri ve yer değiştirme vektörleridir.

4. BULGULAR

Detayları Bölüm 3.1’de verilen doğrusal üçgen (CST) elemanların formülasyonunun ve yine detayları Bölüm 3.2’de verilen CST programının verifikasyonu amacıyla, düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme hallerinin gerçekleştiği problemlerin CST ve SAP2000 programlarıyla elde edilen nümerik çözüm sonuçları ile analitik çözüm sonuçları karşılaştırılmış ve bu bölümde bu örneklerle yer verilmiştir.

4.1. ÖRNEK 1: DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ BİR İNCE LEVHA

Şekil 4.1.a’da üniform, statik ve düzlem içi sınır yükleri etkisindeki dikdörtgen bir levha görülmektedir. Problem, Öztoran’un çalışmasından [30] alınmış olup; incelenen levhada kullanılan kesite ve malzemeye ait özellikler, Tablo 4.1.a’da verilmiştir.

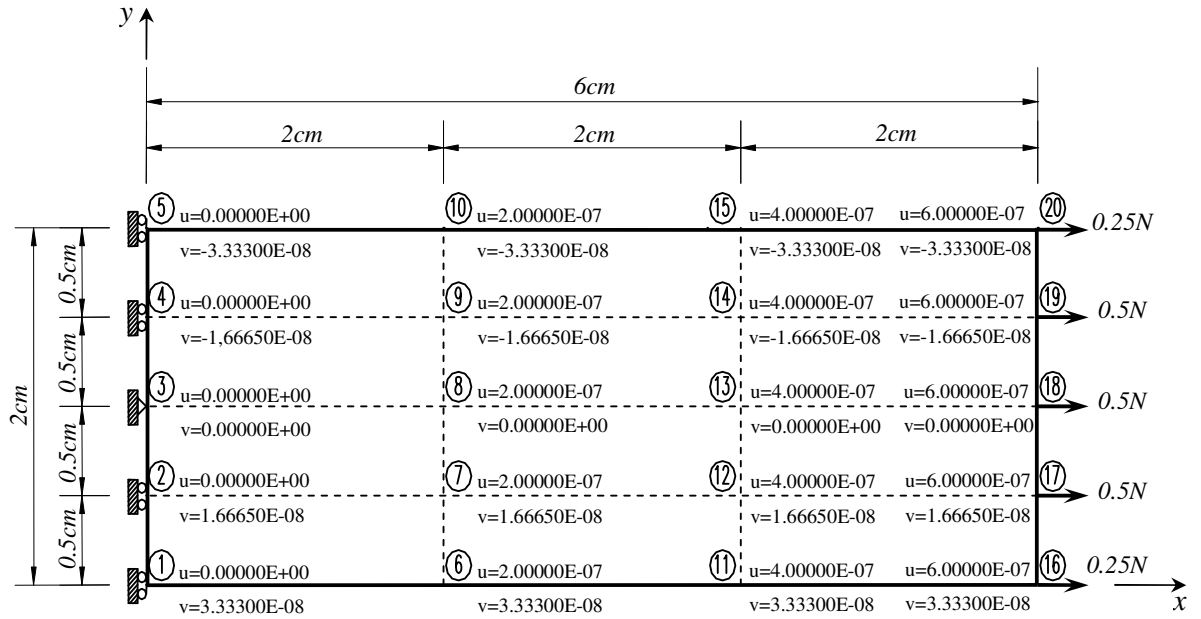


Şekil 4.1.a Düzgün yayılı yük etkisindeki levha

Tablo 4.1.a Örnek 1’e ait malzeme ve en kesit özellikleri

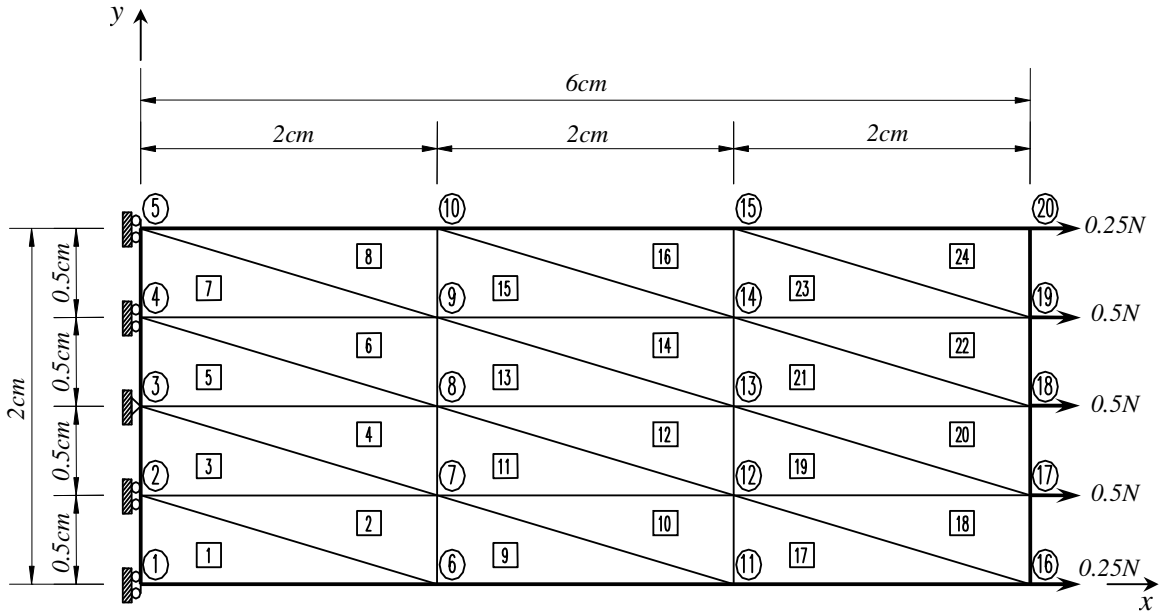
Malzeme No	$E \text{ (N/cm}^2\text{)}$	$h \text{ (cm)}$	ϑ
1	10×10^6	1	0,3333

Levhanın her noktasında analitik değeri 1 N/cm^2 olan σ_x gerilmesinin oluştuğu bu düzlem gerilme probleminde y eksenine göre simetri olması nedeniyle, yarım sistemin analizi yapılmıştır. Şekil 4.1.b’de bu yarım sisteme ait geometrik bilgiler, yükleme bilgileri, sınır şartı bilgileri ve düğüm noktalarındaki u, v yer değiştirme bileşenlerinin kesin çözüm sonuçları görülmektedir.



Şekil 4.1.b Matematik model ve düğüm noktası yer değ. bil. analitik değerleri (cm)

Problem Şekil 4.1.c'de görülen ve doğrusal üçgen elemanlardan oluşan model kullanılarak, CST ve SAP2000 programları ile analiz edilmiş ve elde edilen bazı düğüm noktası yer değiştirmeleri Tablo 4.1.b'de; bazı elemanlarda oluşan gerilme değerleri ise Tablo 4.1.c'de verilmiştir. Probleme ait diğer bütün veri ve sonuçlara ise, Ek-1'de yer verilmiştir.



Şekil 4.1.c Örnek 1'de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan model

Tablo 4.1.b Örnek 1'e ait bazı düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri

<i>Düğüm No</i>		<i>u (cm)</i>	<i>v (cm)</i>
1	<i>CST</i>	0,00000E+00	3,33300E-08
	<i>SAP2000</i>	0,000E+00	3,333E-08
2	<i>CST</i>	0,00000E+00	1,66650E-08
	<i>SAP2000</i>	0,000E+00	1,667E-08
3	<i>CST</i>	0,00000E+00	0,00000E+00
	<i>SAP2000</i>	0,000E+00	0,000E+00
4	<i>CST</i>	0,00000E+00	-1,66650E-08
	<i>SAP2000</i>	0,000E+00	-1,667E-08
5	<i>CST</i>	0,00000E+00	-3,33300E-08
	<i>SAP2000</i>	0,000E+00	-3,333E-08
16	<i>CST</i>	6,00000E-07	3,33300E-08
	<i>SAP2000</i>	6,000E-07	3,333E-08
17	<i>CST</i>	6,00000E-07	1,66650E-08
	<i>SAP2000</i>	6,000E-07	1,666E-08
18	<i>CST</i>	6,00000E-07	2.13540E-21
	<i>SAP2000</i>	6,000E-07	0,000E+00
19	<i>CST</i>	6,00000E-07	-1,66650E-08
	<i>SAP2000</i>	6,000E-07	-1,667E-08
20	<i>CST</i>	6,00000E-07	-3,33300E-08
	<i>SAP2000</i>	6,000E-07	-3,333E-08

Tablo 4.1.c Örnek 1'e ait bazı eleman gerilme değerleri

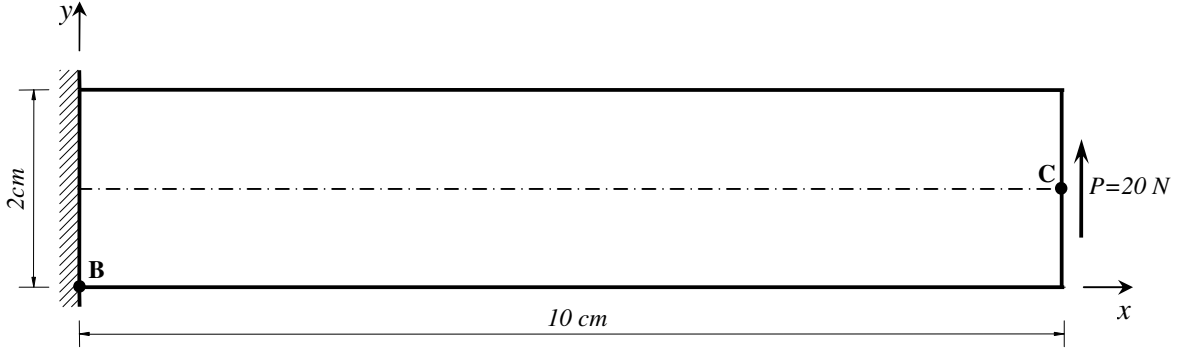
<i>Eleman No</i>		$\sigma_x (N/cm^2)$	$\sigma_y (N/cm^2)$	$\tau_{xy} (N/cm^2)$
1	<i>CST</i>	1,00000E+00	-1.110223E-16	2.357524E-16
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	1,233E-17	-2,109E-16
3	<i>CST</i>	1,00000E+00	1.110223E-16	2.233443E-16
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	-3,730E-17	-2,109E-16
5	<i>CST</i>	1,00000E+00	-1.665335E-16	1.920978E-16
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	3,713E-17	-2,138E-16
7	<i>CST</i>	1,00000E+00	6.365987-314	1.799163E-16
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	1,364E-16	-2,179E-16
18	<i>CST</i>	1,00000E+00	1.665335E-16	7.506852E-16
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	-1,244E-17	1,737E-16
20	<i>CST</i>	1,00000E+00	-1.665335E-16	1.513783E-15
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	-8,687E-17	-6,030E-16
22	<i>CST</i>	1,00000E+00	1.665335E-16	-7.444812E-17
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	-1,614E-16	9,919E-16
24	<i>CST</i>	1,00000E+00	4.440892E-16	-9.926416E-17
	<i>SAP2000</i>	1,000E+00	3,597E-16	-4,622E-16

Tablo 4.1.b'den görüldüğü üzere, doğrusal üçgen elemanlardan oluşan aynı ağ yapısı için CST ve SAP2000 programları aynı yer değiştirme değerlerini vermektedir. Bu değerler ayrıca, Şekil 4.1.b'den görüldüğü üzere analitik değerler ile aynıdır. Ayrıca Tablo 4.1.c'den görüldüğü üzere analitik değerleri $1 N/cm^2$ olan σ_x gerilmeleri için CST

ve SAP2000 programları ile aynı; analitik değeri sıfır olan σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri için ise bu iki programdan farkları 10^{-16} mertebelerinde olan değerler elde edilmiştir.

4.2. ÖRNEK 2: TEKİL YÜK ETKİSİNDEKİ BİR KONSOL KİRİŞ

Bu örnekte düzlem gerilme halinin gerçekleştiği problemlere bir başka örnek olan ve Şekil 4.2.a'da görülen düzlemi içerisindeki tekil P yükü etkisindeki bir konsol kiriş incelenmiştir. Problem, R. D. Cook' dan [13] alınmış olup; bir sistemde doğrusal üçgen elemanların diğer sonlu eleman tiplerine kıyasla ne kadar iyi ya da kötü sonuç verdiğini irdelemek amacıyla ele alınmıştır. İncelenen kirişte kullanılan kesite ve malzemeye ait özellikler ise, Tablo 4.2.a'da verilmiştir.

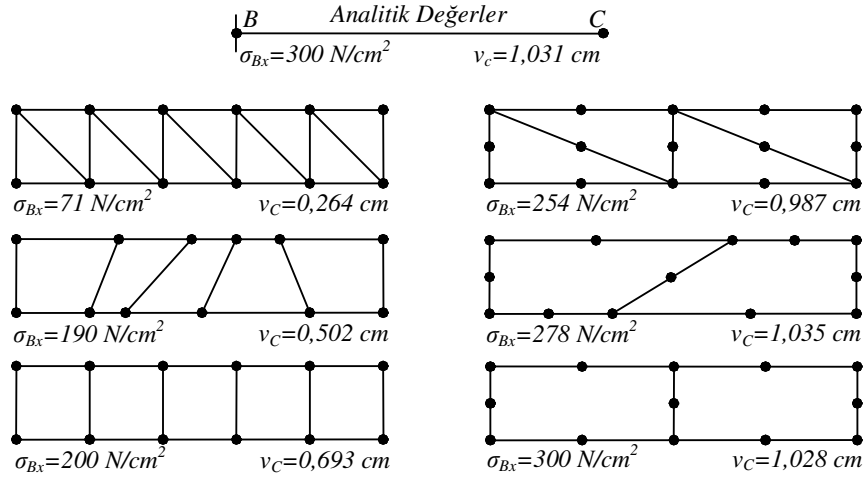


Şekil 4.2.a Uç noktasından etkiyen düzlem içi tekil yük etkisindeki konsol kiriş

Tablo 4.2.a Örnek 2'ye ait malzeme ve en kesit özellikleri

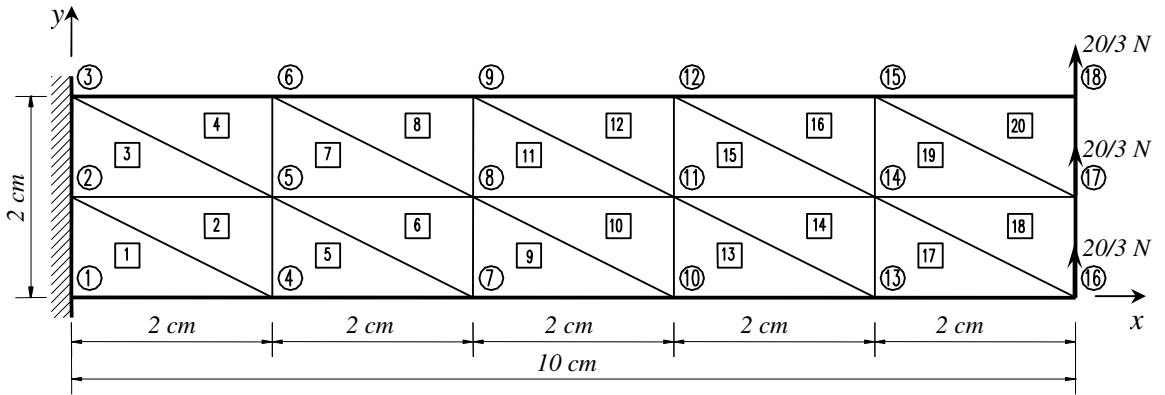
Malzeme No	E (N/cm^2)	h (cm)	ν
1	10^4	1	0,3

Problem, kaynak kitapta iki boyutlu doğrusal üçgen, ikinci dereceden (quadratic) üçgen, doğrusal dikdörtgen ve dörtgen, sekiz düğüm noktalı dikdörtgen ve dörtgen elemanlardan oluşan sonlu eleman modelleri kurularak analiz edilmiş; sonuçlar B noktasındaki σ_x gerilme değeri ile C noktasındaki v yer değiştirmesi dikkate alınarak karşılaştırılmıştır. Bu büyüklükler için, kullanılan sonlu eleman tiplerine göre Şekil 4.2.b'de görülen değerler elde edilmiştir. Buradan görüldüğü üzere CST elemanlarından oluşan model, en fazla eleman sayısına sahip olmasına rağmen bu problem için analitik çözüme en uzak sonuçları vermektedir.



Şekil 4.2.b Örnek 2 için Cook tarafından çözülen bazı sonlu eleman modelleri [13]

CST programının ve kullanılan doğrusal üçgen eleman formülasyonunun doğruluğunu test etmek amacıyla bu problemde, ilk aşamada Şekil 4.2.c'de görülen kaba ağ yapısı kurulmuştur. Oluşturulan bu model, CST ve SAP2000 programları ile analiz edilmiş ve B ile C noktalarında dikkate alınan büyüklükler için Tablo 4.2.b'deki değerler elde edilmiştir. Bu model için probleme ait diğer bütün veri ve sonuçlara ise, Ek-2'de yer verilmiştir.

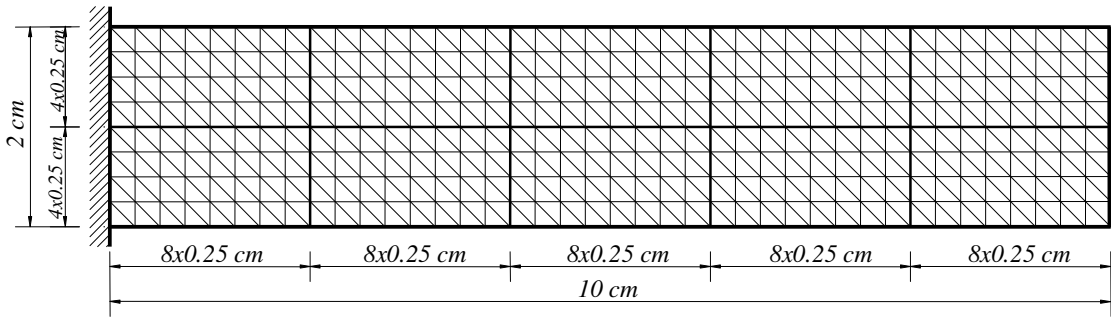


Şekil 4.2.c Örnek 2'de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan 1. model

Tablo 4.2.b Örnek 2'ye ait 1.model için CST ve SAP2000 ile elde edilen değerler

	$\sigma_{Bx} \text{ (N/cm}^2\text{)}$	$v_c \text{ (cm)}$
CST	106,4215	0,387495
SAP2000	106,42	0,387494

Tablo 4.2.b'den de görüldüğü üzere CST ve SAP2000 programları, aynı ağ yapısı için aynı yer değiştirme ve gerilme değerlerini vermektedir. Ancak bu sonuçlar, ağda kullanılan doğrusal üçgen elemanlar nedeniyle Şekil 4.2.b'de verilen analitik değerlerden oldukça uzaktır. Bu nedenle gerçek değerlere ulaşmak amacıyla, daha fazla sayıda doğrusal üçgen elemandan oluşan modeller hem CST hem de SAP2000 programlarında analiz edilmiş ve bu problem için analitik değerlere yakın sonuçlar, ancak Şekil 4.2.d'de görülen 640 elemanlı model ile elde edilebilmiştir. Bu model ile B ve C noktaları için elde edilen değerler, Tablo 4.2.c'de verilmiştir. (Modele ait data ve output dosyalarının bulunduğu Ek-2A, ekteki CD içerisinde verilmiştir. Modelin çok fazla sayıda elemandan oluşması nedeniyle, bu model için bandlı çözüm yapılmıştır.)



Şekil 4.2.d Örnek 2'de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan son model

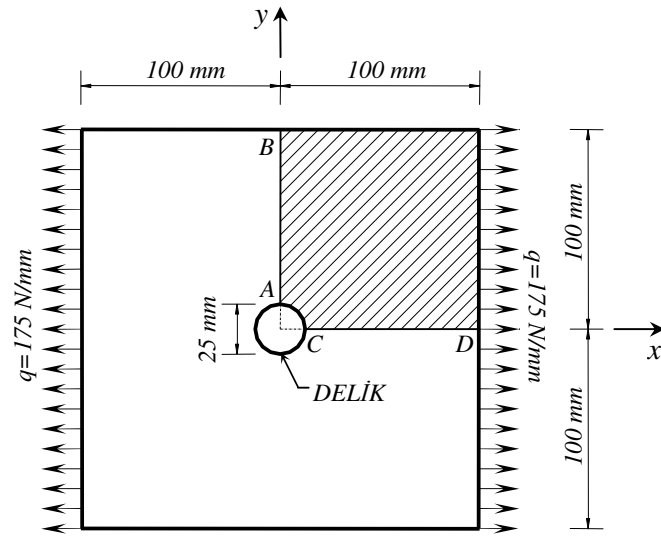
Tablo 4.2.c Örnek 2'ye ait son model için CST ve SAP2000 ile elde edilen değerler

	$\sigma_{Bx} (N/cm^2)$	$v_C (cm)$
CST	305,8134	0,973384
SAP2000	305,82	0,973394

Şekil 4.2.b ve Şekil 4.2.d'deki modellerin karşılaştırılmasından görüldüğü ve Bölüm 2.4.6'da da belirtildiği üzere; doğrusal üçgen elemanlar, bir sonlu eleman modelinde küçük gerilme ve şekil değiştirme değişimlerinin olduğu bölgelerde iyidirler ve diğer durumlarda çok iyi sonuç vermeyebilirler [13]. Ayrıca bu elemanlarla oluşturulmuş bir sonlu eleman modeli, aynı sayıda doğrusal dikdörtgen veya dörtgen elemanlardan oluşan modele göre problemin analitik çözümüne daha uzak sonuçlar verirler [17]. Ancak, doğrusal üçgen elemanların belirtilen kusurlarına rağmen, bu elemanlardan oluşan ağ yapısı tekrar tekrar iyileştirildiğinde Şekil 4.2.d'den de görüldüğü üzere doğru sonuçlara yaklaşmak mümkündür [13].

4.3. ÖRNEK 3: DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ DELİKLİ İNCE LEVHA

Bu örnekte ele alınan problem, Weaver ve Jonston' dan [31] alınmıştır. Şekil 4.3.a'da merkezinde dairesel deliğe sahip, bir ince kare levha görülmektedir. Levha, x doğrultusunda ve düzlemi içerisindeki $q=175 \text{ N/mm}$ lik düzgün yayılı yük etkisindedir. Dolayısıyla levhada düzlem gerilme problemi oluşmaktadır [15]. Kullanılan malzemeye ve en kesite ait özellikler, Tablo 4.3.a'da verilmiştir.



Şekil 4.3.a Düzlemi içerisindeki düzgün yayılı yük etkisindeki delikli ince levha [15]

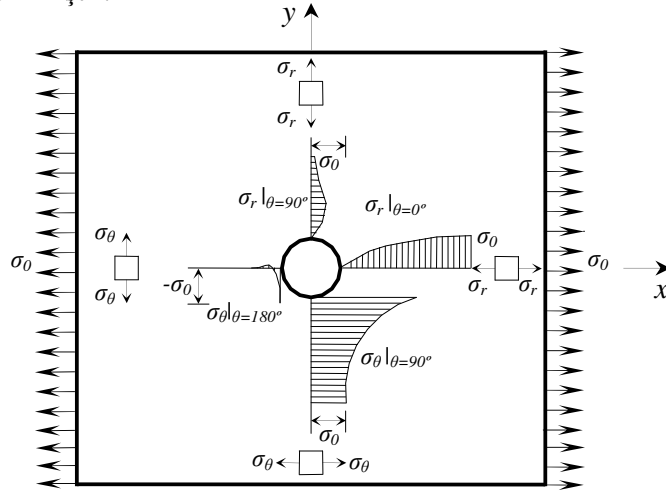
Tablo 4.3.a Örnek 3'e ait malzeme ve en kesit özellikleri

Malzeme No	$E \text{ (N/mm}^2\text{)}$	$h \text{ (mm)}$	ϑ
1	7×10^4	2,5	0,3

Bölüm 2.5'de de belirtildiği gibi, bir doğrultuda üniform çekme etkisindeki bir levhada dairesel bir delik etrafındaki gerilme dağılımı, ilk defa G. Kirsch tarafından analiz edilmiştir. Kirsch'in çözümü, maksimum gerilmenin deliğin sınırında meydana geldiğini (uygulanan çekme gerilmesinin doğrultusuna dik yöndeki çapın uç noktalarında) ve uygulanan gerilmeden üç kat daha büyük olduğunu göstermektedir [3]. Uçlarından σ_0 normal gerilmesiyle çekilen böyle bir levhada meydana gelen gerilmelerin kutupsal koordinatlardaki bileşenlerine ait Kirsch'in çözümü [6] ve [32]'de Denklem 4.1'deki gibi verilmiştir.

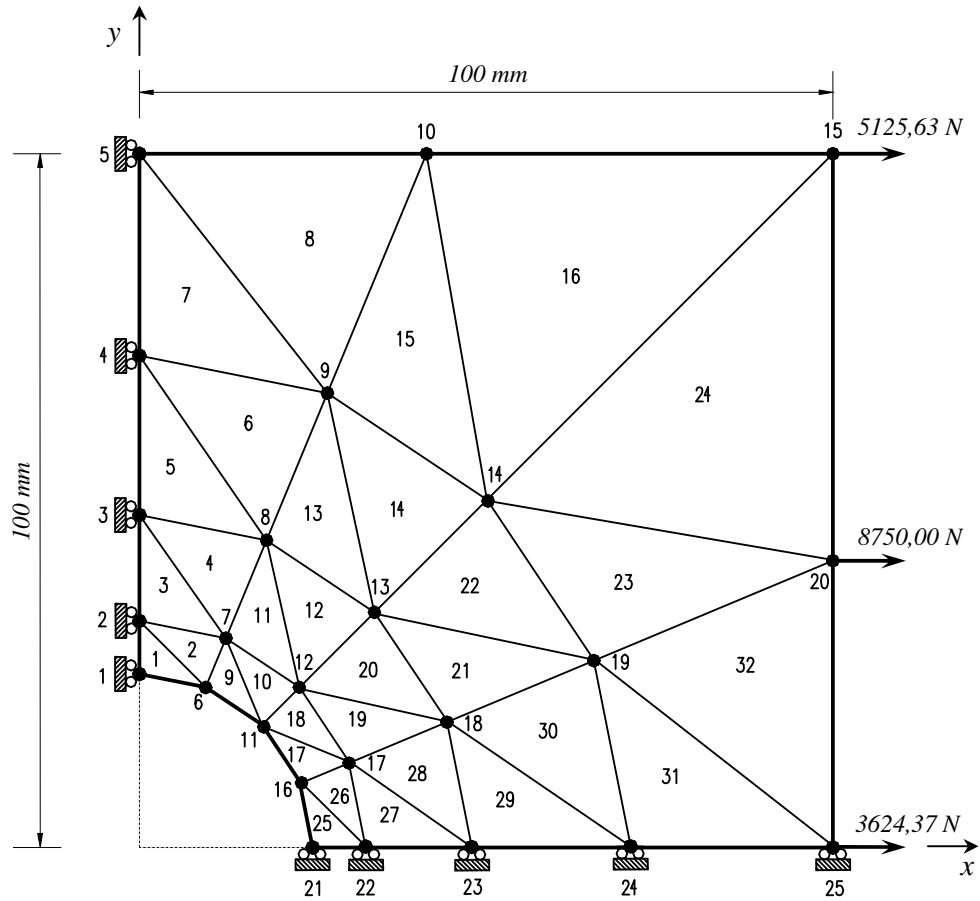
$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{2}\sigma_0(1-\xi^2) + \frac{1}{2}\sigma_0(1+3\xi^4 - 4\xi^2)\cos(2\theta) \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{2}\sigma_0(1+\xi^2) - \frac{1}{2}\sigma_0(1+3\xi^4)\cos(2\theta) \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}\sigma_0(1-3\xi^4 + 2\xi^2)\sin(2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Burada σ_r radyal gerilme, σ_θ teğetsel normal gerilme ve $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi olup; a delik yarıçapı ve r levha üzerindeki bir noktanın delik merkezine uzaklığını göstermek üzere $\xi = a/r$ 'dir. Bu tür bir levhada x, y eksenleri üzerinde oluşan ve Denklem 4.1'deki bağıntılar ile hesaplanan analitik değerlere ait grafikler, [32] ve [6]'da Şekil 4.3.b'deki gibi verilmiştir.



Şekil 4.3.b Düzlemde içinde düzgün yayılı yük etkisindeki delikli levhada gerilmeler [32, 6]

[15]'de bu problemin analizi için oluşturulan ilk sonlu eleman modeli, Şekil 4.3.c'de görülmektedir. Elastisite teorisinden bilindiği üzere, gerilme yığılmaları deliğin etrafında meydana gelir ve bu bölgedeki gerilme değişimleri levhanın diğer bölgelerine kıyasla daha fazla olur. Bu nedenle delik çevresindeki gerilme değişimlerini daha iyi analiz edebilmek amacıyla Şekil 4.3.c'de de görüldüğü üzere, delik etrafında daha küçük elemanlardan oluşan daha sıkı bir ağ yapısı oluşturulmuştur. Ayrıca problem, her iki eksene göre de simetrik olduğu için bu levhanın sadece Şekil 4.3.a'da taralı alan olarak gösterilmiş ve Şekil 4.3.c'de detaylarıyla verilmiş olan 1/4' ünün analizi yeterlidir. Modelde, simetri düzlemleri dışındaki hareketleri önlemek amacıyla x ve y eksenleri üzerindeki düğüm noktaları kayıcı mesnetlerle tutulmuştur. q düzgün yayılı yükü ise, 15, 20 ve 25. düğüm noktalarında konsantre düğüm noktası yükü olarak alınmıştır.

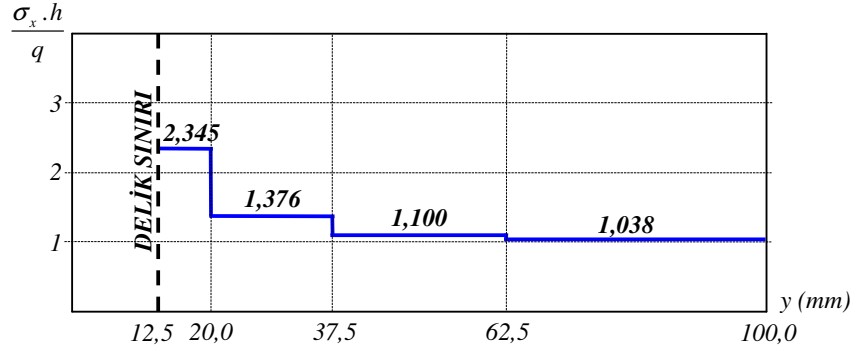
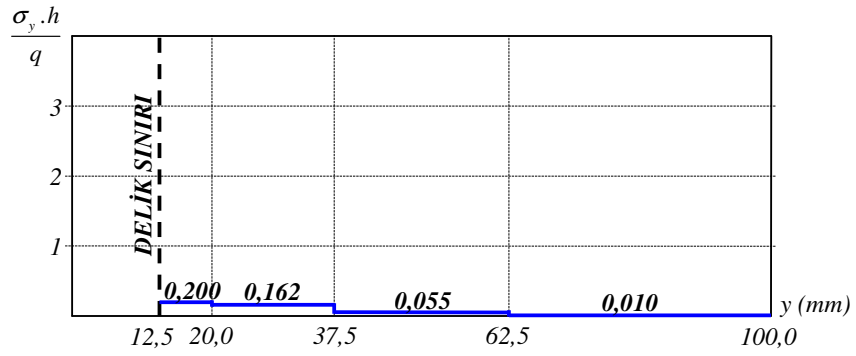
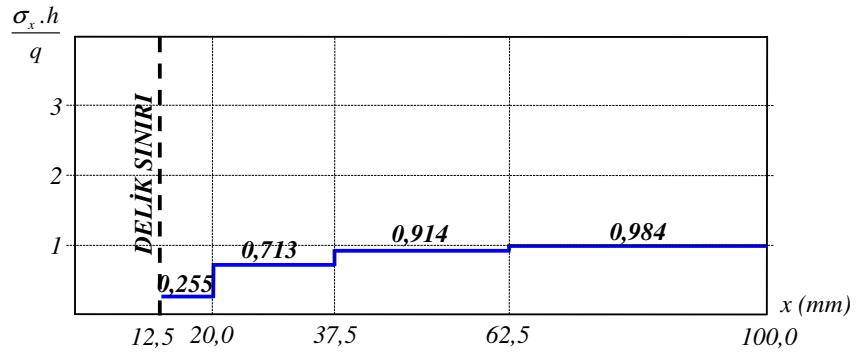
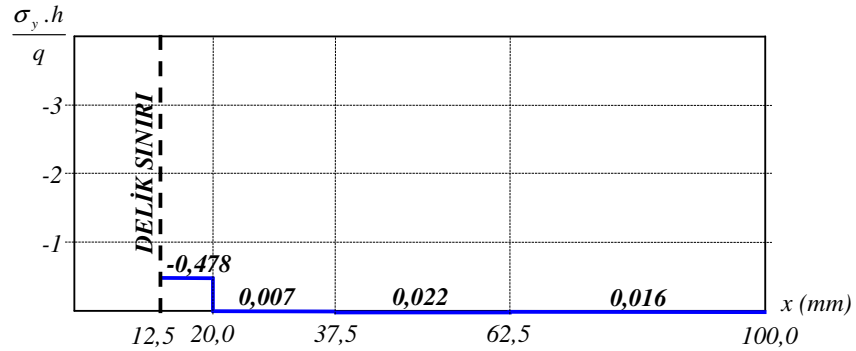


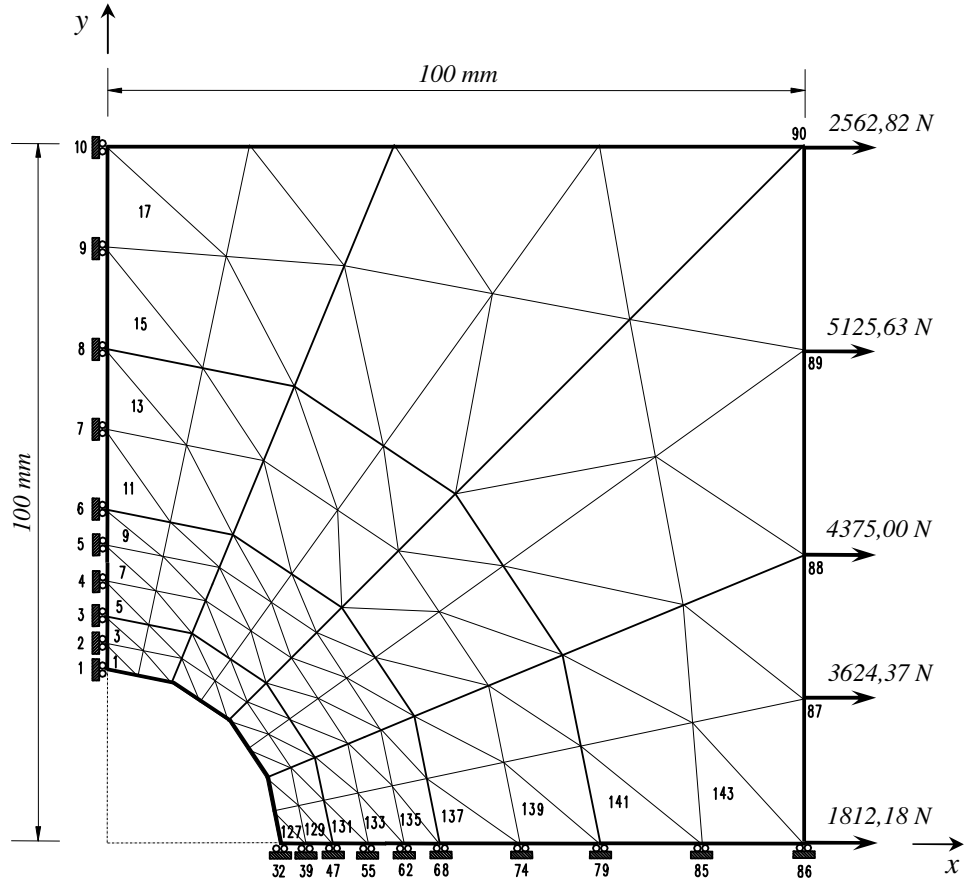
Şekil 4.3.c Örnek 3’de CST ve SAP2000 analizleri için kurulan 1. model

Tablo 4.3.b Örnek 3’e ait 1.model için CST programı ile elde edilen bazı gerilme değerleri

<i>Eleman No</i>	$\sigma_x (N/mm^2)$	$\sigma_y (N/mm^2)$	$\tau_{xy} (N/mm^2)$
1	164,18130	13,97467	-7,909645
3	96,29526	11,32776	4,312368
5	76,99359	3,827866	2,385831
7	72,67058	0,7148115	1,034417
25	17,84627	-33,43880	-10,10097
27	49,88066	0,4613283	-10,27378
29	63,94895	1,551089	-3,651480
31	68,88141	1,120587	-1,411339

Tez çalışması kapsamında da ilk olarak Şekil 4.3.c’deki model, CST ve SAP2000 programlarıyla analiz edilmiş; AB ve CD hattına komşu elemanlarda x ve y doğrultuları için Tablo 4.3.b’deki gerilme değerleri elde edilmiştir. Bu değerler kullanılarak, söz konusu elemanların merkezinde x ve y doğrultusunda oluşan gerilmelerin, uygulanan yüke oranını gösteren sırasıyla $\sigma_x \cdot h/q$ ve $\sigma_y \cdot h/q$ değerlerinin, AB boyunca değişimi için yine sırasıyla Şekil 4.3.d ve Şekil 4.3.e’deki grafikler elde edilmiştir. CD boyunca değişimleri için ise, sırasıyla Şekil 4.3.f ve Şekil 4.3.g’deki grafikler elde edilmiştir.

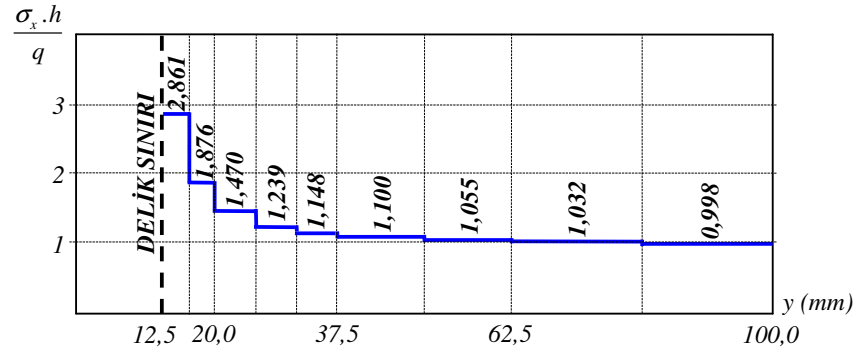
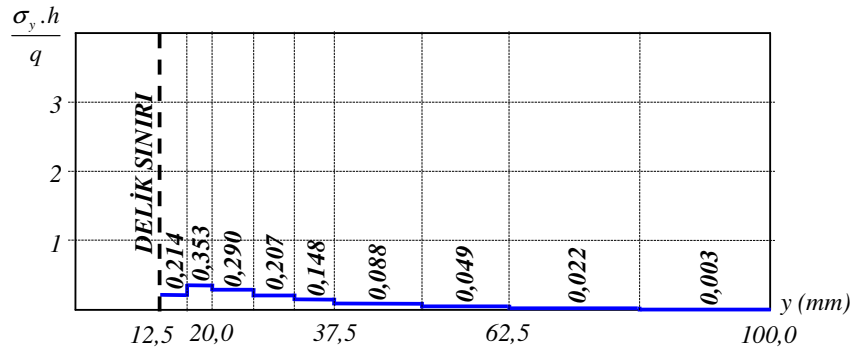
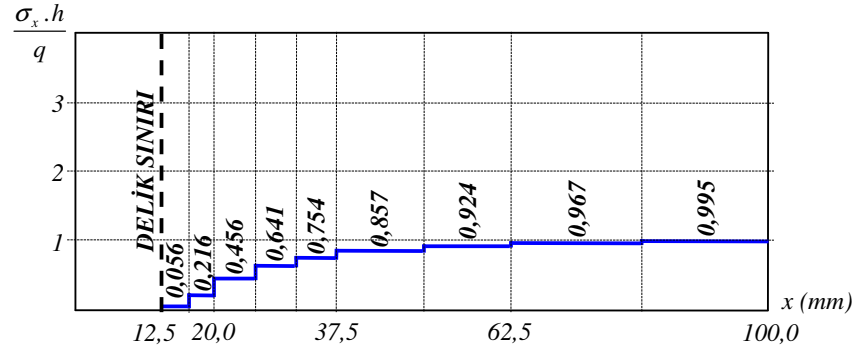
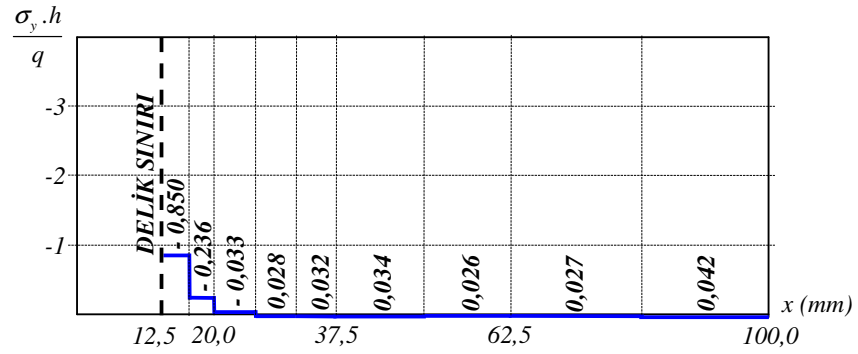
Şekil 4.3.d Örnek 3'e ait 1. modelde AB hattı boyunca $\sigma_x \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.e Örnek 3'e ait 1. modelde AB hattı boyunca $\sigma_y \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.f Örnek 3'e ait 1. modelde CD hattı boyunca $\sigma_x \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.g Örnek 3'e ait 1. modelde CD hattı boyunca $\sigma_y \cdot h/q$ değişimi



Şekil 4.3.h Örneğin 3'ünde CST ve SAP2000 analizleri için kurulan son model

Tablo 4.3.c Örneğin 3'e ait son model için CST programı ile elde edilen bazı gerilme değerleri

<i>Eleman No</i>	σ_x (N/mm ²)	σ_y (N/mm ²)	τ_{xy} (N/mm ²)
<i>1</i>	2.003078E+02	1.498073E+01	-8.479391E+00
<i>3</i>	1.313018E+02	2.473868E+01	3.333331E+00
<i>5</i>	1.028986E+02	2.028432E+01	4.383558E+00
<i>7</i>	8.673030E+01	1.447783E+01	3.631310E+00
<i>9</i>	8.035470E+01	1.036694E+01	2.629474E+00
<i>11</i>	7.704983E+01	6.173535E+00	1.750294E+00
<i>13</i>	7.387872E+01	3.424206E+00	1.139212E+00
<i>15</i>	7.226090E+01	1.564153E+00	7.535420E-01
<i>17</i>	6.987918E+01	2.258081E-01	7.342127E-01
<i>127</i>	3.918843E+00	-5.950627E+01	-2.218143E+00
<i>129</i>	1.512915E+01	-1.652346E+01	-8.263537E+00
<i>131</i>	3.192037E+01	-2.309261E+00	-7.240953E+00
<i>133</i>	4.484697E+01	1.993129E+00	-5.077701E+00
<i>135</i>	5.276819E+01	2.261272E+00	-3.562243E+00
<i>137</i>	5.997477E+01	2.367637E+00	-2.458308E+00
<i>139</i>	6.468850E+01	1.866727E+00	-1.482977E+00
<i>141</i>	6.768956E+01	1.904797E+00	-9.890911E-01
<i>143</i>	6.965118E+01	2.907150E+00	-8.565557E-01

Şekil 4.3.i Örnek 3'e ait son modelde AB hattı boyunca $\sigma_x \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.j Örnek 3'e ait son modelde AB hattı boyunca $\sigma_y \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.k Örnek 3'e ait son modelde CD hattı boyunca $\sigma_x \cdot h/q$ değişimiŞekil 4.3.l Örnek 3'e ait son modelde CD hattı boyunca $\sigma_y \cdot h/q$ değişimi

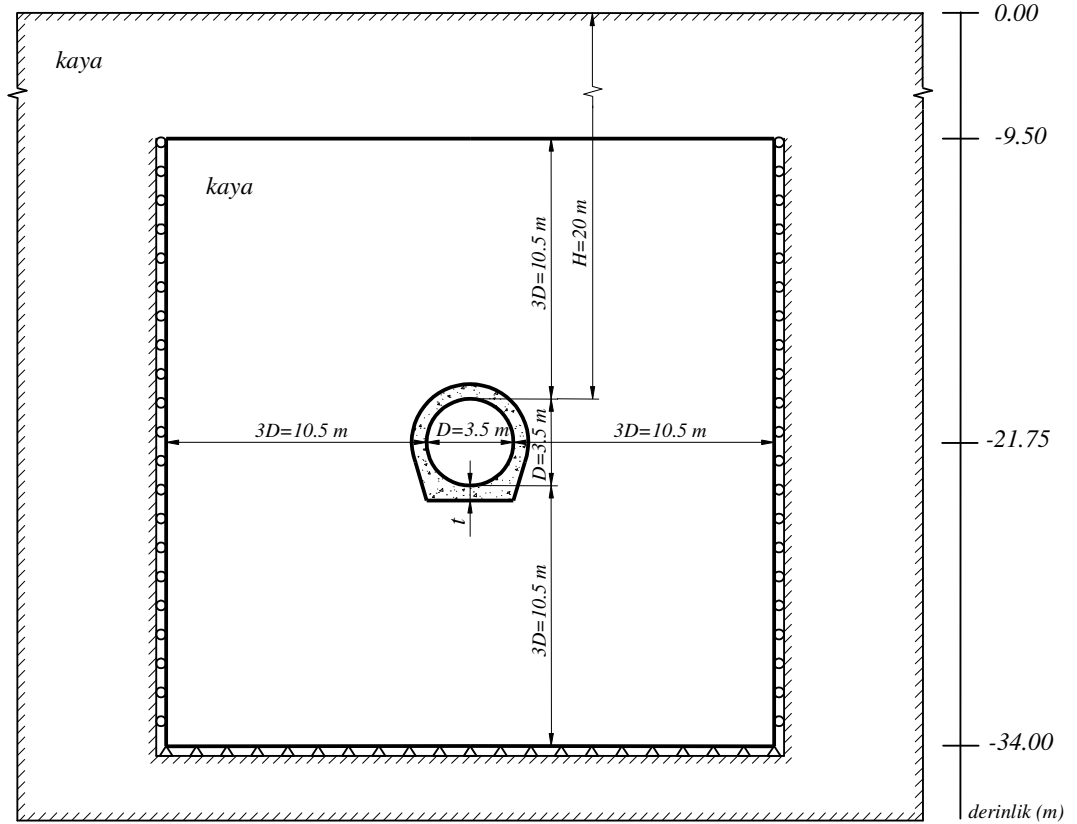
Bu problem için analitik değerlere göre çizilmiş Şekil 4.3.b'deki grafiklerden görüldüğü üzere, $\theta=90^\circ$ ve 270° için teğetsel normal gerilme σ_θ 'ya ait grafik, delik kenarında $3\sigma_0$ 'dan başlayıp delik merkezinden uzaklaştıkça azalmakta ve belli bir mesafe sonra σ_0 değeriyle devam etmektedir. Yani $\theta=90^\circ$ ve 270° için delik kenarında σ_θ maksimum değerine ulaşmaktadır. Bu, levhada meydana gelen en büyük çekme gerilmesidir ve levhaya uygulanan çekme gerilmesinin üç katıdır. Aynı açı değerleri için radyal gerilme bileşeni σ_r 'ye ait grafik ise, delik kenarında sıfırdan başlayıp delik merkezinden uzaklaştıkça bir miktar artmakta ve sonrasında tekrar sıfır olmaktadır. $\theta=0^\circ$ ve 180° için σ_r 'ye ait grafik ise, delik kenarında sıfırdan başlayıp, uzaklaştıkça artmakta ve delik merkezinden belli bir mesafe sonra σ_0 değeriyle devam etmektedir. Aynı açı değerleri için σ_θ 'ya ait grafik ise, delik kenarında $-\sigma_0$ 'dan başlamakta ve merkezden uzaklaştıkça azalarak, pozitif bölgeye geçip buradaki bir miktar artıştan belli bir mesafe sonra sıfır olmaktadır. Yani bu hat üzerinde, teğetsel doğrultuda basınç gerilmeleri hâkimdir.

Analitik gerilme dağılımı yukarıdaki gibi özetlenen bu problemin CST programı ile analizi için kurulan 1. modele ait grafiklerden de görüldüğü üzere, sistemin bu program ile nümerik çözümü neticesinde analitik grafiklere benzer grafikler elde edilmiştir. Ancak Örnek 2'de de olduğu gibi kurulan kaba ağ yapısı nedeniyle Denklem 4.1 ile verilen analitik değerlere yakın sonuçlar elde edilememiştir. (İlk model için probleme ait diğer bütün veri ve sonuçlara, Ek-3'de yer verilmiştir.) Bu nedenle yine Örnek 2'de olduğu gibi ağ yapısı tekrar tekrar iyileştirilmiş, her yeni model için elde edilen gerilme değerleri kullanılarak AB ve CD hatları boyunca $\sigma_x \cdot h/q$ ve $\sigma_y \cdot h/q$ dağılım grafikleri çizilmiş ve gerçek değerlere yakın sonuçlar, ancak Şekil 4.3.h'da görülen model ile elde edilebilmiştir. (Burada ara modellere ait grafikler verilmemiş, sadece ilk ve son modellere ait grafikler verilmiştir. Son modele ait data ve output dosyalarının bulunduğu Ek-3A, ekteki CD içerisinde verilmiştir. Son modelin çok fazla sayıda elemandan oluşması nedeniyle, bu model için bandlı çözüm yapılmıştır.) CST ve SAP2000 programları ile analiz edilen bu son modelde AB ve CD hattına komşu elemanların merkezlerinde x ve y doğrultuları için elde edilen gerilme değerleri, Tablo 4.3.c'de verilmiştir. Grafikler ise Şekil 4.3.i, Şekil 4.3.j, Şekil 4.3.k ve Şekil 4.3.l ile verilmiştir. Bu grafiklerin Şekil 4.3.b'de verilen grafikler ile kıyaslanmasından görüldüğü üzere, ilk modele nazaran bu model ile analitik değerlere oldukça yakın sonuçlar elde edilebilmiştir.

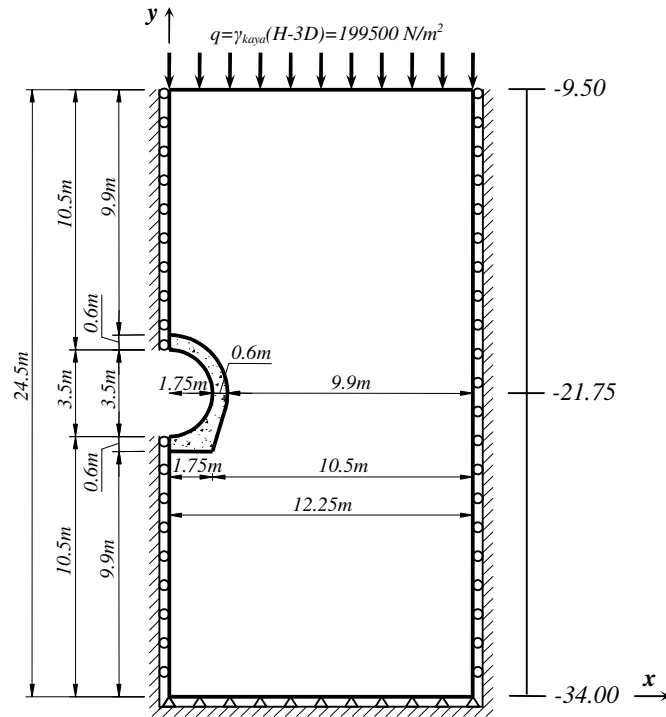
Bu örnekte de görülmüştür ki, doğrusal üçgen elemanlardan oluşan ağ yapısı tekrar tekrar iyileştirildiğinde gerçek sonuçlara ulaşmak mümkündür. Ancak diğer sonlu eleman tiplerine nazaran kullanılan eleman sayısı oldukça fazla olmaktadır. Ayrıca CST programıyla nümerik analize ait grafiklerden görülmektedir ki, $\theta=90^\circ$ ve 270° için teğetsel normal gerilme σ_θ 'ya ait grafik ve $\theta=0^\circ$ ve 180° için radyal gerilme σ_r 'ye ait grafik, a delik çapını göstermek üzere yaklaşık $r=3a$ 'dan itibaren σ_0 değeriyle devam etmektedir (Şekil 4.3.i ve Şekil 4.3.k). Benzer şekilde $\theta=90^\circ$ ve 270° için σ_r 'ye ait grafik ve $\theta=0^\circ$ ve 180° için σ_θ 'ya ait grafik, yine yaklaşık $r=3a$ 'dan itibaren sıfır değerine ulaşmaktadır (Şekil 4.3.j ve Şekil 4.3.l). Yani [7]'de de belirtildiği üzere, Saint – Venant prensibinden hareketle delik merkezinden itibaren delik yarıçapı a'ya nazaran büyük uzaklıklarda ($\approx 3a$) gerilme yayılışındaki değişimin ihmal edilebileceği sonucuna varılır. Ayrıca delik ile aynı merkezli ve $r=3a$ yarıçaplı daire çevresindeki gerilmeler, deliksiz levhadaki gerilmelere eşittir.

4.4. ÖRNEK 4: ZATİ YÜKLER ETKİSİNDEKİ BİR TÜNEL – ZEMİN SİSTEMİ

Bu örnekte, (x, y) düzlemi üzerindeki kesiti Şekil 4.4.a'da görülen tipik bir tünel – zemin sistemi incelenmiştir. Yeraltı tünelleri, geometrilerinin ve üzerlerine gelen yüklerin karmaşıklığı, kaya ve kaplama malzemelerinin özel durumları ve karşılıklı etkileşimleri nedeniyle analizi oldukça güç yapılarıdır. Basit geometri ve yük durumları dışında bu tip problemlerin analitik yöntemlerle çözümü çok güç, hatta imkânsızdır. Hatta tünelin açılması sırasında tünel çevresindeki kayanın ve iç basıncın uygulanması ile de betonun çatlayacağı göz önüne alınacak olursa problemin analitik çözümü birkaç kat daha güçleşmektedir [33]. Bu bilgiler doğrultusunda bu örnek için sonlu eleman analizi, tünel kaplama malzemesinin ve zeminin doğrusal – elastik, homojen ve izotrop davranış gösterdiği varsayımı ile sadece sistemi oluşturan elemanların kendi ağırlığı altında yapılmıştır. Şekil 4.4.a'da D tüneldeki beton kaplamanın iç çap uzunluğunu, t beton kaplamanın kalınlığını ve H tünelin üzerindeki zemin tabakasının yüksekliğini ifade etmektedir. Kesit alan y eksenine göre simetrik olduğundan, sınır şartları Şekil 4.4.b'deki gibi tanımlanmış yarım sistemin analizi yapılmıştır. Tünel kaplamasına ve zemine ait özellikler Tablo 4.4.a'da, yarım sistemin sonlu eleman analizi için kurulan model Şekil 4.4.c'de, tünel kesidine ait düğüm noktası numaraları Şekil 4.4.d'de ve eleman numaraları ise Şekil 4.4.e'de görülmektedir.



Şekil 4.4.a Tünel – zemin sisteminin dikkate alınan kısmı

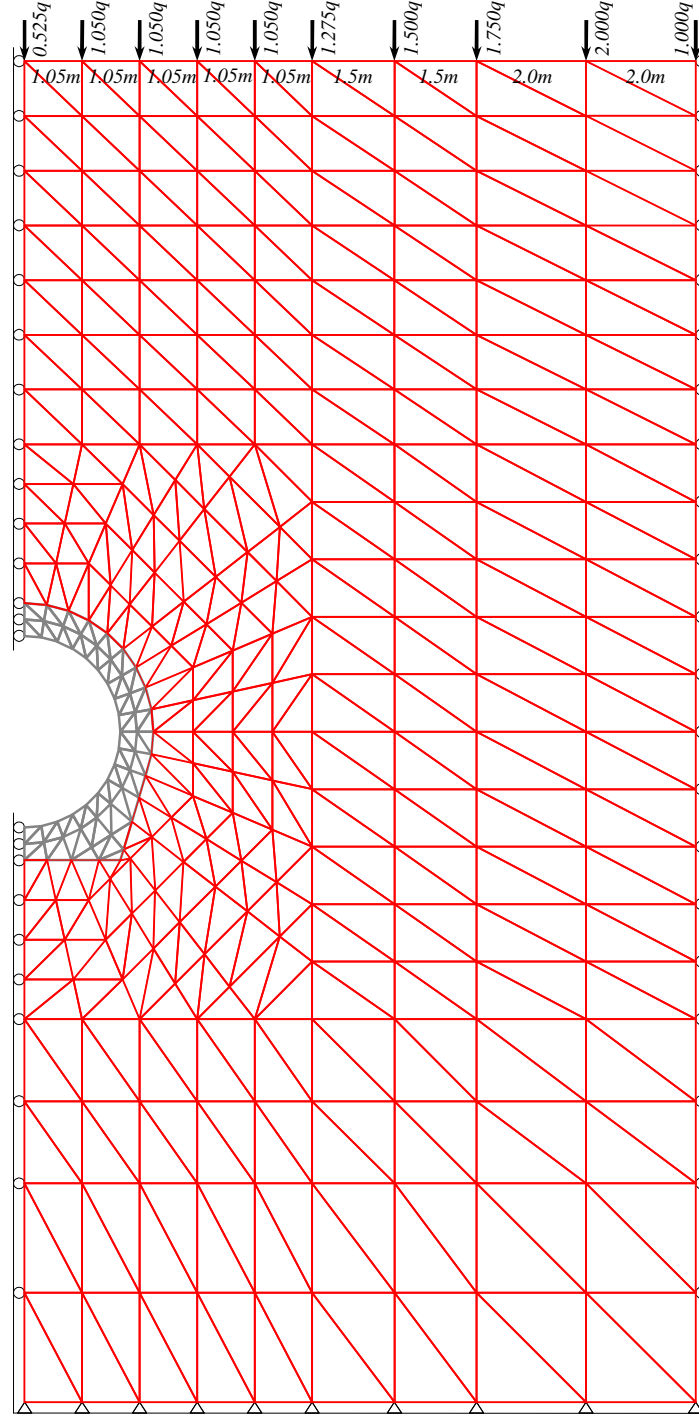


Şekil 4.4.b Simetri nedeniyle analizi yapılan yarım sistem

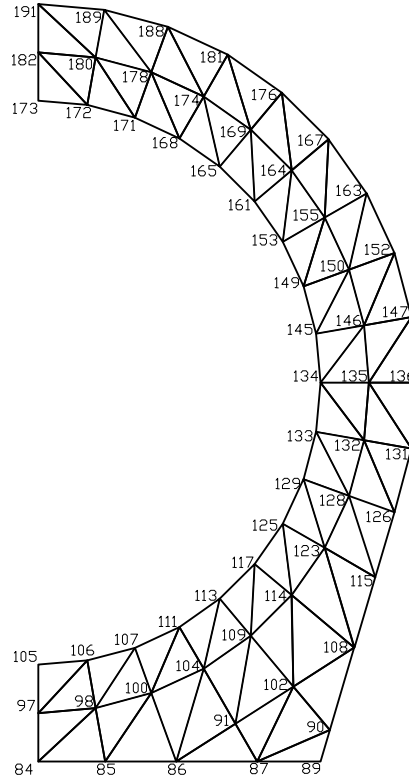
Not: Problemdeki geometrik değerler, [33]'den alınmıştır.

Tablo 4.4.a Örnek 4'e ait malzeme ve en kesit özellikleri

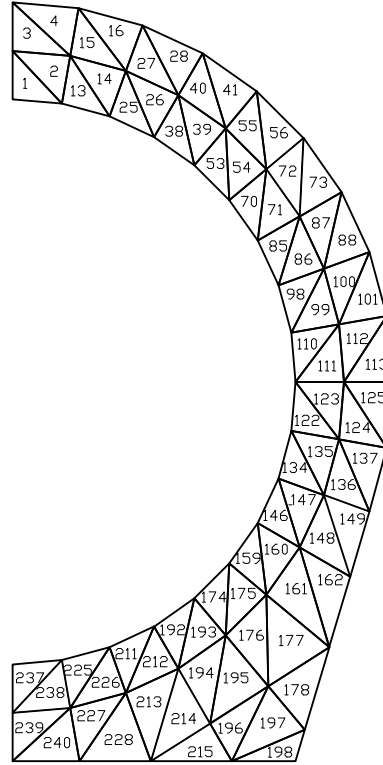
Malzeme No	E (N/m^2)	h (m)	ϑ	γ (N/m^2)
1 (tünel kaplaması)	33×10^9	1	0,2	25000
2 (zemin)	1×10^8	1	0,3	21000



Şekil 4.4.c Analizi yapılan yarım sistem için kurulan sonlu eleman modeli



Şekil 4.4.d Tünel kesidine ait düğüm noktası numaraları



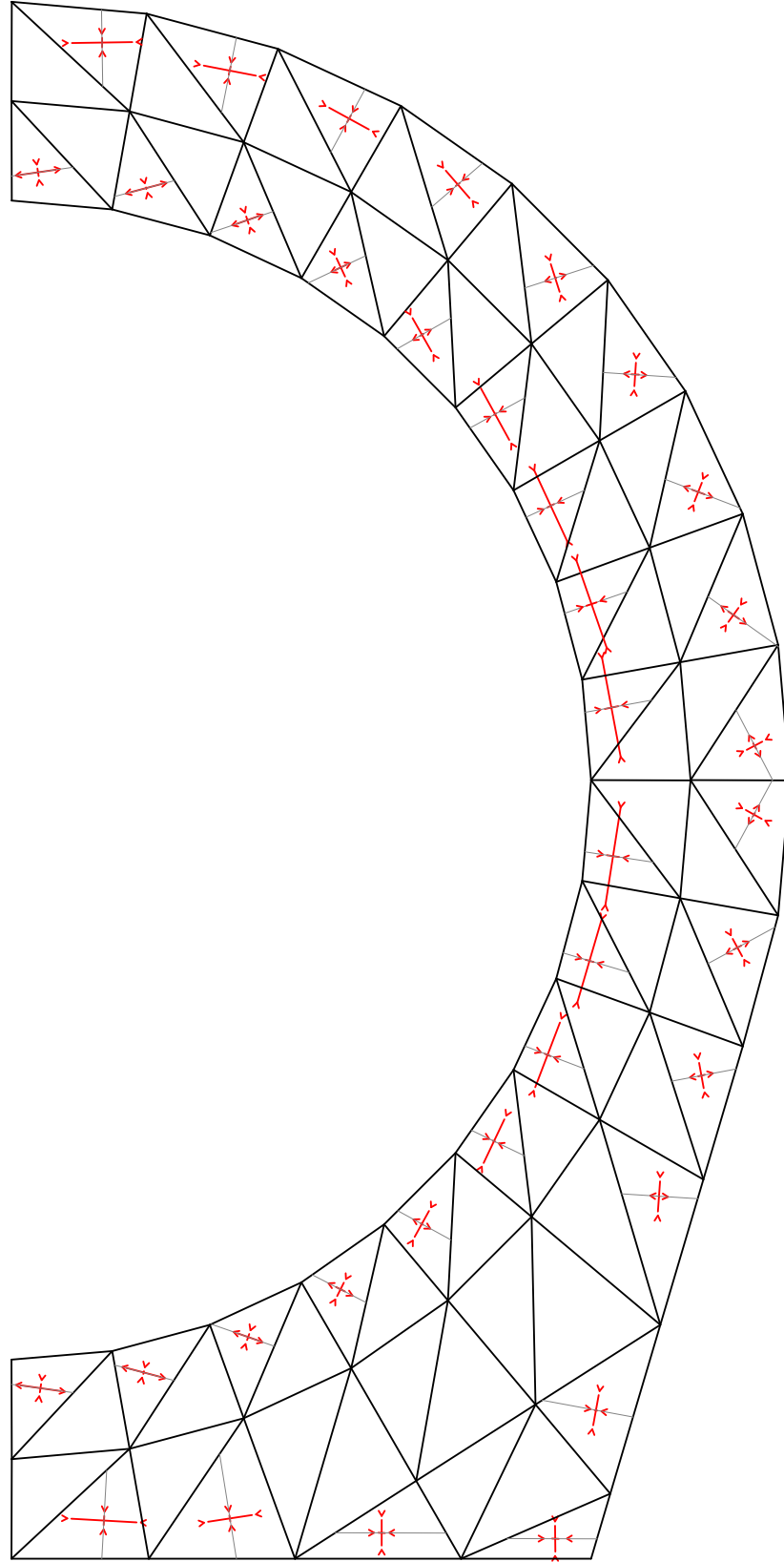
Şekil 4.4.e Tünel kesidine ait eleman numaraları

Tablo 4.4.b Örnek 4'e ait bazı düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri

Düğüm No	SAP 2000		CST	
	u (m)	v (m)	u (m)	v (m)
84	0,000000	-0,048827	0,000000	-0,0598536
105	0,000000	-0,048841	0,000000	-0,0598713
134	0,000342	-0,049339	0,000430	-0,0604564
136	0,000334	-0,049346	0,000419	-0,0604654
173	0,000000	-0,049882	0,000000	-0,0610968
191	0,000000	-0,049894	0,000000	-0,0611120

Tablo 4.4.c Tünel kesidine ait bazı elemanlarda oluşan gerilme değerleri

Eleman No	SAP2000			CST		
	σ_x (N/m ²)	σ_y (N/m ²)	τ_{xy} (N/m ²)	σ_x (N/m ²)	σ_y (N/m ²)	τ_{xy} (N/m ²)
1	2137296,46	-403719,48	377981,8	2764224,00	-496608,40	464402,00
4	-3661249,12	-567557,03	-47154,07	-4008310,00	-523814,60	-105050,10
13	1883702,07	29066,09	532995,96	2474315,00	-20498,81	577680,80
16	-3097004,38	-592157,55	515267,15	-3385004,00	-550699,40	540392,70
25	1242647,34	-271573,22	586994,25	1718858,00	-317481,20	581267,80
28	-2199222,02	-973819,13	950920,88	-2373076,00	-988129,40	1035427,00
38	407447,35	-861591,08	772054,54	723433,90	-915387,50	759283,70
41	-1118197,43	-1390042,36	940987,54	-1140016,00	-1469716,00	1014423,00
53	-391263	-1699905,91	1097536,4	-238259,90	-1790867,00	1128708,00
56	-156622,38	-1587580,6	509604,57	-53586,65	-1695991,00	505161,20
70	-960881,56	-2779933,51	1438947,97	-931558,70	-2953796,00	1545272,00
73	441851,37	-1425833,99	-124813,34	598307,00	-1495622,00	-238358,60
85	-1214164,12	-3968467,29	1628399,18	-1246080,00	-4270224,00	1804976,00
88	549127,96	-943144,88	-674236,61	682815,80	-908196,30	-878058,60
98	-1175671,29	-5039838,19	1518020,19	-1211662,00	-5490808,00	1724770,00
101	188984,28	-422909,16	-881116,2	249786,60	-243133,90	-1116041,00
110	-1017250,93	-5902693,11	943538,48	-1027219,00	-6498047,00	1111724,00
113	-757088,01	64514,31	-586175,3	-818351,70	361802,50	-749197,70
122	-878998,57	-5853598,7	-792015,07	-875767,30	-6444151,00	-936385,70
125	-786197,66	-51924,28	562100,71	-844940,20	228859,90	720132,80
134	-910810,5	-4872521,94	-1277975,38	-914603,20	-5306496,00	-1439349,00
137	124302,58	-815373,2	727954,53	194322,20	-677538,90	943267,30
146	-863175,68	-3697588,54	-1266934,75	-841991,40	-3973267,00	-1377078,00
149	333865,03	-1492929,34	358545,68	443775,20	-1518756,00	504059,00
159	-659746,61	-2398792,62	-1081789,57	-580129,60	-2535056,00	-1123372,00
162	55288,09	-1832150,41	-115873,1	138672,80	-1964538,00	-72474,96
174	-298575,38	-1329862,52	-817303,82	-130900,20	-1368450,00	-805320,40
178	-234463,05	-1797280,14	-302293,92	-159646,20	-1951266,00	-323225,20
192	285872,04	-579964,33	-614865,54	575290,90	-580928,10	-580269,70
198	-410755,77	-1564131,52	-93521,69	-383673,60	-1670170,00	-97056,69
211	1156191,12	-200530,6	-548136,74	1595823,00	-217066,60	-535321,10
215	-1346085,2	-693310,42	-414468,21	-1444718,00	-690317,90	-441203,70
225	2028676,98	-13705,5	-571729,78	2608643,00	-59581,13	-617391,20
228	-2617237,21	-440673,74	-357287,21	-2840323,00	-382774,00	-371529,80
237	2426675,46	-436017,73	-403382,45	3062068,00	-532619,20	-493256,40
240	-3943514,92	-576161,77	180994,59	-4281084,00	-509490,20	251476,00



Şekil 4.4.f Tünel kesidine ait bazı elemanlarda oluşan asal gerilmeler

Zeminin boyutları, gerçekte Şekil 4.4.a'da gösterilen boyutlardan çok daha büyük olabilmektedir. Ancak tünel içi gerilmelere bağlı olarak, kazı çevresindeki kayaların tünel boşluğuna yönelme isteğinin yine kayaların birbirine destek vererek bir denge kurmaları şeklinde açıklanan “kemerlenme etkisi” nedeniyle; zeminin tünelden, tünel çapının 2 - 3 misli uzaklıkta bittiği varsayılarak yapılan bir düzlem şekil değiştirme analizi, tünel çevresinde oluşacak gerilmeleri hesaplamada çoğu kez yeterli olur. Bu nedenle hem $\pm x$ hem de $\pm y$ yönlerinde tünelin iç çapından itibaren 3D uzaklığının sınırladığı, Şekil 4.4.a'da görülen alan dikkate alınmıştır. Ayrıca tünel uzunluğu boyunca dış yüklerin değişmeyip sabit kaldığı göz önüne alınırsa; tünelin herhangi bir yerinde alınan kesit alanda oluşacak gerilmeler ve şekil değiştirmeler bütün tünel uzunluğu boyunca aynı olacaktır. Bu nedenle de tünel, z doğrultusunda birim uzunlukta bir kesit alarak incelenmiştir.

Analiz sonucunda tünel kesidine ait bazı düğüm noktalarının yer değiştirmeleri için CST ve SAP2000 programlarından elde edilen değerler, Tablo 4.4.b'de verilmiştir. Tablodan görüldüğü üzere, iki program arasında yer değiştirmeler açısından %20'lere varan farklı değerler elde edilmiştir. Dolayısıyla, eleman gerilmelerinde de aynı oranda farklar oluşmuş ve bu farklar, Tablo 4.4.c'de görülmektedir.

Zati yükler etkisinde tünel kesidinin tepe noktaları olan 173, 182 ve 191. düğüm noktalarında ve taban noktaları olan 84, 97 ve 105. düğüm noktalarında $-y$ doğrultusunda birbirlerine çok yakın değerlerde düşey yer değiştirme değerleri elde edilmiştir. Bu sonuç, tepe düğüm noktaları için geçerli olabilir ancak taban düğüm noktalarında sifıra yakın, hatta tünel kazısı nedeniyle kaldırılan zemin hacmi ve bu hacmin altındaki kısmın ortamda bulunan su etkisiyle kabarma davranışı gösterme olasılığı nedeniyle $+y$ yönünde yer değiştirmelerin oluşması beklenir. Ancak bu problemde, tünel kazısı için kaldırılan zemin hacminin etkisi dikkate alınmamış ve ayrıca ortamda su bulunmadığı, kabarmanın gerçekleşmediği varsayımıyla zati yükler altında doğrusal – elastik analiz yapılmıştır. Bu nedenle taban düğüm noktaları için Tablo 4.4.b'deki değerler elde edilmiştir.

Tünel kesidine ait elemanların orta noktalarında elde edilen (x, y) düzlemlerindeki gerilmeler, asal normal gerilmeler ve bu gerilmelere ait doğrultular ise Tablo 4.4.c'de

verilmiştir. Kesidin iç ve dış çemberlerine komşu elemanlardaki asal gerilmeler ve doğrultuları, Tablo 4.4.c'deki σ_x , σ_y ve τ_{xy} değerleri kullanılarak, dönüşüm formülleri ile hesaplanmış ve Şekil 4.4.f'de gösterilmiştir. Tablo 4.4.c'den ve Şekil 4.4.f'den görüldüğü üzere analiz sonucunda maksimum çekme gerilmeleri, tünelin iç çemberine sınır tepe bölgesindeki 1, 13, 25. elemanlarda ve taban bölgesindeki 211, 225 ve 237. elemanlarda gerçekleşmiştir. Maksimum basınç gerilmeleri ise, tünelin iç çemberine komşu orta bölgedeki 70, 85, 98, 110, 122, 134, 146, 159. elemanlar ile dış çembere komşu tepe bölgesindeki 4, 16 ve taban bölgesindeki 228, 240. elemanlarda gerçekleşmiştir. Ayrıca analiz sonucunda görülmüştür ki, zemin elemanlarında çekme gerilmeleri oluşmamış ve elemanlardaki asal gerilmeler, her iki doğrultu için de maksimum değerlerini -34.50 m hattına komşu elemanlarda alırken, -9.50 m seviyelerine doğru azalarak minimum değerlerini almaktadır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada köşe noktalarında bulunan üç düğüm noktasına sahip ve her düğüm noktasında maksimum iki doğrusal yer değiştirme bileşeni bulunabilen doğrusal üçgen elemanların oluşturduğu modeller kullanılarak; FEM ile düzlem elastisite problemlerinin analizi gerçekleştirilmiştir. Doğrusal üçgen elemanların formülasyonuna göre analiz yapan, tez kapsamında oluşturulmuş modüllerin doğruluğunu test amacıyla; düzlemi içerisinde düzgün yayılı yükler etkisindeki bir levha, düzlemi içerisinde bulunan tekil yük etkisindeki bir konsol kiriş, yine düzlem içi düzgün yayılı yükler etkisindeki delikli bir ince levha ve son olarak sadece sistemi oluşturan elemanların zati ağırlığı etkisindeki bir tünel problemi incelenmiştir.

Bölüm 4.1’de üniform, statik ve düzlem içi sınır yükleri etkisindeki dikdörtgen bir levha incelenmiştir. Düzlem gerilme halinin olduğu bu problem için 24 doğrusal üçgen sonlu elemandan oluşan model, hem CST hem de SAP2000 programı ile analiz edilmiş ve aynı ağ yapısı için her iki programda da aynı düğüm noktası yer değiştirmeleri, elemanlarda x doğrultusu için aynı çekme gerilmeleri ve y doğrultusundaki normal gerilmeler ile (x, y) düzlemindeki kayma gerilmeleri için 10^{-16} mertebelerinde farklar bulunan değerler elde edilmiştir. Bu fark da programdaki işlemlerde yapılan yuvarlamalardan kaynaklanmıştır. Ayrıca problemin basit olması nedeniyle kurulan kaba ağ yapısı için iki programdan elde edilen nümerik çözüm sonuçlarının, analitik çözüm sonuçları ile aynı olduğu görülmüştür.

Bölüm 4.2’de düzlemi içerisindeki tekil yük etkisinde bulunan bir konsol kiriş incelenmiştir. Bu problem için ilk aşamada 20 doğrusal üçgen elemandan oluşan sonlu eleman modeli, yine CST ve SAP2000 programları ile analiz edilmiş ve yine aynı elemanlardan oluşan aynı ağ yapısı için aynı düğüm noktası yer değiştirmeleri ve eleman gerilmeleri elde edilmiştir. Ancak bu ağ yapısı için elde edilen sonuçların analitik çözümlerden oldukça uzak olduğu ve bu problemde kaba ağ yapısı ile doğrusal üçgen elemanların iyi sonuçlar vermediği görülmüştür. Bu problem için gerçek

değerlere ulaşmak amacıyla ağ yapısı iyileştirilerek, kullanılan eleman sayısı arttırılmış ve aranılan gerçek çözüme 640 doğrusal üçgen elemandan oluşan sonlu eleman modeli ile yaklaşmıştır. Aynı problem [13]'de Şekil 4.2.b'de görülen doğrusal üçgen eleman, dört düğüm noktalı dörtgen ve dikdörtgen eleman, altı düğüm noktalı üçgen eleman, sekiz düğüm noktalı dörtgen ve dikdörtgen elemanlardan oluşan çeşitli sonlu eleman modelleri ile çözülmüş ve analitik değerlere en yakın sonuçlar, sadece 2 adet sekiz düğüm noktalı dikdörtgen elemandan oluşan ağ yapısı ile elde edilmiştir. Buradan doğrusal üçgen elemanlardan oluşan kaba ağ yapısının bu problem için iyi sonuçlar vermediği görülmüştür.

Bölüm 4.3'de ilk defa G. Kirsch tarafından ele alınmış, düzlemi içerisindeki düzgün yayılı yükler etkisinde ve merkezinde dairesel bir delik bulunan, ince bir levha problemi incelenmiştir. Kirsch'in bu problemde levhada oluşan kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri için verdiği formüller ve bu formüller ile elde edilen simetri eksenleri üzerindeki radyal ve teğetsel gerilmelere ait grafikler, [6], [7] ve [32] kaynaklarından elde edilmiştir. Simetri nedeniyle levhanın ¼'ü için hazırlanan doğrusal üçgen elemanlardan oluşan kaba ağ yapısı yine CST ve SAP2000 programları ile analiz edilmiş ve bu iki programdan aynı yer değiştirme ve gerilme değerleri elde edilmiştir. Ancak bu kaba ağ yapısı ile Kirsch'in problem için verdiği analitik çözüm sonuçlarına oldukça uzak değerler elde edilmiş ve bu nedenle bir önceki problemde olduğu gibi ağ yapısı iyileştirme yoluna gidilmiştir. Her sonlu eleman modeli için elde edilen sonuçlara göre, simetri eksenleri üzerinde oluşan gerilmenin uygulanan gerilmeye oranını gösteren $\sigma_x \cdot h/q$ ve $\sigma_y \cdot h/q$ değerlerinin grafikleri çizilmiştir (Not: ancak bu çalışmada ilk ve son modellere ait grafikler sunulmuştur.) ve model iyileştirildiğinde analitik çözümlere ait grafiklere yakın grafikler elde edilebileceği görülmüştür.

Bölüm 4.4'de ise, sadece zati ağırlıklar etkisinde bulunan bir tünel – zemin sistemi problemi incelenmiştir. Bu problem için kurulan Şekil 4.4.c'deki modelin CST ve SAP2000 programları ile analizi sonucunda, yer değiştirme ve gerilme değerleri için Tablo 4.4.b ve c'de görülen %20'lere varan farklar elde edilmiştir.

İncelenen bu problemler sonucunda görülmüştür ki; doğrusal üçgen elemanlar, bir sonlu eleman modelinde küçük gerilme ve şekil değiştirme değişimlerinin olduğu bölgelerde

iyidirler ve diğer durumlarda problemin zorluk derecesine bağlı olarak, çok iyi sonuç vermeyebilirler. Ayrıca bu elemanlarla oluşturulmuş bir sonlu eleman modeli, aynı sayıda ikinci dereceden (quadratic) üçgen, doğrusal dikdörtgen veya dörtgen, köşe ve kenar orta noktalarında olmak üzere toplam 8 düğüm noktalı dikdörtgen veya dörtgen (serendipity) gibi elemanlardan oluşan modellere göre problemin analitik çözümüne daha uzak sonuçlar vermektedirler. Ancak bu elemanların da kullanılması gereken durumlar hala mevcuttur ve bu nedenle bu elemanların kullanımı terk edilmemiştir. Çünkü bu elemanlar, karmaşık geometrilere adaptasyonları nedeniyle çok kullanışlıdır ve bunlar, genelde keskin köşeli karmaşık geometriye sahip iki boyutlu bir modeli oluşturmak için idealdirler. Ayrıca basit geometrik özelliklere sahip üçgensel yapısı nedeniyle bu elemanlar, ağ oluşturma işlemi açısından en basit olan sonlu eleman tipidir. Belirtilen kusurlarına rağmen, bu elemanlardan oluşan ağ yapısı tekrar tekrar iyileştirildiğinde doğru sonuçlara yaklaşmanın mümkün olduğu görülmüştür.

Bu çalışma sonucunda ayrıca görülmüştür ki, incelenen herhangi bir problemdeki sistemin gerçek davranışını yansıtan eleman formülasyonlarını kullanmak ve bu formülasyonları gerekli programlama bilgisi ile kodlamak suretiyle, kendi yapısal analiz programlarımızı geliştirebiliriz. Ayrıca mevcut ve artan bilgi doğrultusunda bu programlara ait eleman kütüphanelerinin geliştirilmesi ve böylece uygulamada kullanılan genel amaçlı ticari analiz programları kapasitesinde yazılımların geliştirilmesi mümkündür, ancak kolay değildir.

KAYNAKLAR

1. ÖZTORUN, N.K., 1994, Computer Analysis of Multi – Storey Building Structures, Ph.D. Thesis in Civil Engineering, METU, Turkey
2. ERTEPINAR, A., DEMİRAY, H., İNAN, E., AKSOĞAN, O., AKÖZ, A.Y., 1987, *Şekil Değiştirebilen Cisimler Mekaniği, Bölüm IV, s. 152-214*, KTÜ, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi.
3. TIMOSHENKO, S.P., 1953, *History of Strength of Materials with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., USA, 0-486-61187-6
4. ÇAĞDAŞ, S., 2006, *Bilgisayar Uygulamaları ile Yapı Mekaniğinde Nümerik Metodlar ve Matris – Deplasman Yöntemi*, Türkmen Kitabevi, İstanbul, 975-6392-52-5
5. BAKİOĞLU, M., 2001, *Cisimlerin Mukavemeti*, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul, 975-486-435-7
6. GİRKMANN, K. (Çeviren: 12, S.S.), 1991, *Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler Cilt I*, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul, İTÜ Kütüphanesi Sayı: 1463
7. TIMOSHENKO, S.P. ve GOODIER, J.N. (Çevirenler: KAYAN, İ. ve ŞUHUBİ, E.), 1969, *Elastisite Teorisi*, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul, İTÜ Kütüphanesi Sayı: 757
8. OMURTAG, M.H., 2005, *Mukavemet Cilt I*, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul, 975-511-431-9
9. İNAN, M., 1969, *Düzlemde Elastisite Teorisi*, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, İTÜ Kütüphanesi Sayı: 750
10. BAKİOĞLU, M., KADIOĞLU, N. ve ENGİN, H., 2000, *Mukavemet Problemleri Cilt I*, Beta Yayınevi, İstanbul, 975-486-192-7
11. ZIENKIEWICZ, O.C. and TAYLOR, R.L., 2000, *The Finite Element Method – Fifth Edition – Volume 1: The Basis*, Butterworth – Heinemann (A division of Reed Educational and Professional Publishing Ltd.), Woburn, 0-7506-5049-4
12. TAMEROĞLU, S.S., 1991, *Elastisite Teorisi: Çözüm Yöntemleri Bazı Matematiksel Teknikler*, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul, İTÜ Kütüphanesi Sayı: 1434

13. COOK, R.D., 1995, *Finite Element Modelling for Stress Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 0-471-10774-3
14. BATHE, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice – Hall, Inc., USA, 0-13-301458-4
15. WASTI, S.T. and UTKU, M., 1990, *Finite Elements in Structural Analysis (Class Notes)*, METU, Ankara, (yayınlanmamış)
16. ÖZTORUN, N.K., 2002, *Sonlu Elemanlara Giriş (Ders Notu)*, İÜ, İstanbul, (yayınlanmamış)
17. LIU, G.R. and QUEK, S.S., 2003, *The Finite Element Method: A Practical Course*, Butterworth – Heinemann (An imprint of Elsevier Science Ltd.), Burlington, 0-7506-5866-5
18. SLOT, T. and YALCH, J. P., 1966, Stress analysis of plane perforated structures by point-wise matching of boundary conditions, *Nuclear Engineering and Design*, 4 (2), 163-176
19. ANDO, Y., IIDA, K., YAGAWA, G. and KAWAI, T., 1968, On the application of the energy method to the stress concentration problem of a rectangular plate with a central circular hole, *Nuclear Engineering and Design*, 7 (3), 223-235
20. CHOI, D. K. and NOMURA, S., 1992, Application of symbolic computation to two-dimensional elasticity, *Computers & Structures*, 43(4), 645-649
21. SABIR, A. B. and SFENDJI A., 1995, Triangular and rectangular plane elasticity finite elements, *Thin-Walled Structures*, 21 (3), 225-232
22. OLSEN, P. C., 1999, Evaluation of triangular plate elements in rigid-plastic finite element analysis of reinforced concrete, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179(1-2), 1-17
23. BERGAN, P.G., FELIPPA, C.A., 1985, A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(1), 25-69
24. PROVIDAS, E., KATTİS, M.A., 2000, An assesment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations, *Computers & Structures*, 77(2) , 129-139
25. SEGERLIND, L.J., 1984, *Applied FiniteElement Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York
26. İNAN, M., 1967, *Cisimlerin Mukavemeti*, Arı Kitabevi, İstanbul
27. KÖKSAL, T., 1995, *Sonlu Elemanlar Metodu*, YTÜ Matbaası, İstanbul, YTÜ Yayını Sıra No:304

28. CAMP, C.V., 2006, *Civil 7117 – Finite Elements in Structural Mechanics* [online], Memphis, The University of Memphis, <http://www.ce.memphis.edu/7117/> [Ziyaret Tarihi: 19 Nisan 2006]
29. AKTAŞ, Z., 1973, *Elektronik Hesaplayıcılarla Programlama ve Uygulama – Bölüm II: Nümerik Metodlar ve Mühendislik Uygulamaları*, ODTÜ Elektronik Hesap Bilimleri Bölümü Yayın No:2, Başnur Matbaası, Ankara
30. ÖZTORUN, N.K., 2007, Reply to ‘discussion on: Rectangular finite element formulation’, *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 (2007), 733-736
31. WEAVER, W., and JOHNSTON, P.R., 1984, *Finite Element for Structural Analysis*, Prentice – Hall, Inc., New Jersey
32. OMURTAG, M.H., 2007, *Mukavemet Cilt I – 2. Baskı*, Birsen Yayınevi Ltd. Şti., İstanbul, 975-511-431-9
33. AKAY, H. U., YILMAZ, Ç., 1978, Tünel Zemin Sistemlerinin Analizi İçin Bir Sonlu Eleman Bilgisayar Programı, ODTÜ Müh. Fak. İnş. Müh. Böl., Proje No: 77-04-03-57

EKLER

EK - 1

[ORNEK1]: SEKIL 4.1.C DEKI MODELE AIT DATA

CST

NOK

20

1	0	0
2	0	0.5
3	0	1
4	0	1.5
5	0	2
6	2	0
7	2	0.5
8	2	1
9	2	1.5
10	2	2
11	4	0
12	4	0.5
13	4	1
14	4	1.5
15	4	2
16	6	0
17	6	0.5
18	6	1
19	6	1.5
20	6	2

SIN

5

1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0

YUK

5

16	0.25	0
17	0.50	0
18	0.50	0
19	0.50	0
20	0.25	0

CST

1

24

1	1	1	6	2
2	1	6	7	2
3	1	2	7	3
4	1	7	8	3
5	1	3	8	4
6	1	8	9	4
7	1	4	9	5

```

8 1 9 10 5
9 1 6 11 7
10 1 11 12 7
11 1 7 12 8
12 1 12 13 8
13 1 8 13 9
14 1 13 14 9
15 1 9 14 10
16 1 14 15 10
17 1 11 16 12
18 1 16 17 12
19 1 12 17 13
20 1 17 18 13
21 1 13 18 14
22 1 18 19 14
23 1 14 19 15
24 1 19 20 15
CSM
1
1 10000000 1 0.3333 0

```

[ORNEK1.OUT]: SEKIL 4.1.C DEKI MODELIN OUTPUT DOSYASI

Not: Sadece analiz sonuçları verilmiştir.

```

SISTEMIN BAND GENISLIGI.....= 17
MAKSIMUM MATRIS SATIR SAYISI.....=235294
TOPLAM NOKTA SAYISI.....= 20
PROBLEM ICIN GEREKEN SATIR SAYISI....= 40

```

DENKLEMLER HESAPLANIYOR

HESAPLANAN NOKTA DEFORMASYONLARI:

```

=====
NOKTA    DX-HAREKETI    DY-HAREKETI    QZ-HAREKETI
=====
1    0.00000E+00    3.33300E-08
2    0.00000E+00    1.66650E-08
3    0.00000E+00    0.00000E+00
4    0.00000E+00    -1.66650E-08
5    0.00000E+00    -3.33300E-08
6    2.00000E-07    3.33300E-08
7    2.00000E-07    1.66650E-08
8    2.00000E-07    1.02450E-22
9    2.00000E-07    -1.66650E-08
10   2.00000E-07    -3.33300E-08
11   4.00000E-07    3.33300E-08
12   4.00000E-07    1.66650E-08
13   4.00000E-07    9.04549E-22
14   4.00000E-07    -1.66650E-08
15   4.00000E-07    -3.33300E-08
16   6.00000E-07    3.33300E-08
17   6.00000E-07    1.66650E-08
18   6.00000E-07    2.13540E-21
19   6.00000E-07    -1.66650E-08
20   6.00000E-07    -3.33300E-08

```

DUZLEM GERILME ELEMENLARININ GERILMELERI :

ELEMAN	GERILMEX	GERILMEY	GERILMEXY
1	1.000000E+00	-1.110223E-16	2.357524E-16
2	1.000000E+00	-4.996004E-16	-7.692972E-16
3	1.000000E+00	1.110223E-16	2.233443E-16
4	1.000000E+00	-4.440892E-16	-6.020154E-16
5	1.000000E+00	-1.665335E-16	1.920978E-16
6	1.000000E+00	-5.551115E-16	-8.127253E-16
7	1.000000E+00	6.365987-314	1.799163E-16
8	1.000000E+00	-2.775558E-16	-2.357524E-16
9	1.000000E+00	1.665335E-16	5.955849E-16
10	1.000000E+00	-1.110223E-16	3.412205E-16
11	1.000000E+00	3.330669E-16	7.941132E-16
12	1.000000E+00	-2.220446E-16	-8.425223E-17
13	1.000000E+00	3.330669E-16	5.955849E-16
14	1.000000E+00	-4.440892E-16	-5.211368E-16
15	1.000000E+00	3.885781E-16	9.926416E-16
16	1.000000E+00	-1.110223E-16	-5.335448E-16
17	1.000000E+00	5.551115E-17	1.191170E-15
18	1.000000E+00	1.665335E-16	7.506852E-16
19	1.000000E+00	6.365987-314	7.941132E-16
20	1.000000E+00	-1.665335E-16	1.513783E-15
21	1.000000E+00	2.775558E-16	3.970566E-16
22	1.000000E+00	1.665335E-16	-7.444812E-17
23	1.000000E+00	8.881784E-16	3.970566E-16
24	1.000000E+00	4.440892E-16	-9.926416E-17

EK - 2**[ORNEK2] : SEKIL 4.2.C DEKI MODELE AIT DATA**

CST

NOK

18

1 0 0

2 0 1

3 0 2

4 2 0

5 2 1

6 2 2

7 4 0

8 4 1

9 4 2

10 6 0

11 6 1

12 6 2

13 8 0

14 8 1

15 8 2

16 10 0

17 10 1

18 10 2

SIN

3

1 1 1 0 0

2 1 1 0 0

3 1 1 0 0

```

YUK
3
16 0 6.6667
17 0 6.6667
18 0 6.6667
CST
1
20
1 1 1 4 2
2 1 4 5 2
3 1 2 5 3
4 1 5 6 3
5 1 4 7 5
6 1 7 8 5
7 1 5 8 6
8 1 8 9 6
9 1 7 10 8
10 1 10 11 8
11 1 8 11 9
12 1 11 12 9
13 1 10 13 11
14 1 13 14 11
15 1 11 14 12
16 1 14 15 12
17 1 13 16 14
18 1 16 17 14
19 1 14 17 15
20 1 17 18 15
CSM
1
1 10000 1 0.3 0

```

[ORNEK2.OUT]: SEKIL 4.2.C DEKI MODELIN OUTPUT DOSYASI

Not: Sadece analiz sonuçları verilmiştir.

```

SISTEMIN BAND GENISLIGI.....= 11
MAKSIMUM MATRIS SATIR SAYISI.....=363636
TOPLAM NOKTA SAYISI.....= 18
PROBLEM ICIN GEREKEN SATIR SAYISI....= 36

```

DENKLEMLER HESAPLANIYOR

HESAPLANAN NOKTA DEFORMASYONLARI:

```

=====
NOKTA    DX-HAREKETI    DY-HAREKETI    QZ-HAREKETI
=====
1        0.00000E+00    0.00000E+00
2        0.00000E+00    0.00000E+00
3        0.00000E+00    0.00000E+00
4        1.93687E-02    2.51509E-02
5        5.94202E-05    2.41762E-02
6        -1.99118E-02    2.58580E-02
7        3.47008E-02    8.48140E-02
8        -3.14354E-04    8.42497E-02
9        -3.54083E-02    8.56269E-02
10       4.54700E-02    1.70967E-01

```

11	-5.75541E-04	1.70704E-01
12	-4.66195E-02	1.71762E-01
13	5.18582E-02	2.74696E-01
14	-8.39975E-04	2.74754E-01
15	-5.34220E-02	2.75474E-01
16	5.38615E-02	3.87428E-01
17	-1.05376E-03	3.87495E-01
18	-5.59390E-02	3.88219E-01

DUZLEM GERILME ELEMENLARININ GERILMELERİ:

ELEMAN	GERILMEX	GERILMEY	GERILMEXY
1	1.064215E+02	3.192645E+01	4.836706E+01
2	-2.886841E+00	-1.061314E+01	-2.777390E+01
3	3.264846E-01	9.794537E-02	4.649262E+01
4	-1.038612E+02	-1.434045E+01	-2.708557E+01
5	8.102863E+01	1.456150E+01	4.047034E+01
6	-3.914205E+00	-6.817779E+00	-1.914748E+01
7	3.490658E+00	1.786510E+01	3.871360E+01
8	-8.060508E+01	-1.040949E+01	-2.003627E+01
9	5.731142E+01	1.154991E+01	3.100608E+01
10	-2.303017E+00	-3.323613E+00	-1.083982E+01
11	3.105139E+00	1.470357E+01	3.128204E+01
12	-5.811354E+01	-6.858189E+00	-1.144810E+01
13	3.423199E+01	7.636889E+00	2.237953E+01
14	-1.262452E+00	1.990683E-01	-2.590060E+00
15	2.033614E+00	1.118596E+01	2.300330E+01
16	-3.500315E+01	-3.301737E+00	-2.792568E+00
17	1.119731E+01	3.936998E+00	1.410740E+01
18	-9.528122E-01	3.869995E-01	5.598656E+00
19	1.198737E+00	7.558830E+00	1.457253E+01
20	-1.144324E+01	3.805891E+00	5.721619E+00

EK – 2A**[ORNEK2A]:SEKIL 4.2.D DEKI MODELE AIT DATA ve OUTPUT DOSYALARI**

NOT1: Çok fazla yer kaplamaları nedeniyle; Şekil 4.2.d'deki modele ait data ve output dosyaları, diğer örneklere ait data ve output dosyalarının da bulunduğu, ekteki CD içerisinde verilmiştir.

NOT2: C noktası Şekil 4.2.d'deki modelde 365 no'lu düğüm noktasına karşı gelmekte ve B noktası ise, 1 numaralı eleman üzerinde bulunmaktadır.

EK – 3**[ORNEK3]: SEKIL 4.3.C DEKI MODELE AIT DATA**

CST

NOK

25

1	0	12.5
2	0	20.
3	0	37.5

4	0	62.5
5	0	100.
6	4.7835429	11.548494
7	7.6536686	18.477591
8	14.350629	34.645482
9	23.917715	57.742471
10	41.421356	100.
11	8.8388348	8.8388348
12	14.142136	14.142136
13	26.516504	26.516504
14	44.194174	44.194174
15	100.	100.
16	11.548494	4.7835429
17	18.477591	7.6536686
18	34.645482	14.350629
19	57.742471	23.917715
20	100.	41.421356
21	12.5	0.
22	20.	0.
23	37.5	0.
24	62.5	0.
25	100.	0.

SIN

10

1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0
21	0	1	0	0
22	0	1	0	0
23	0	1	0	0
24	0	1	0	0
25	0	1	0	0

YUK

3

15	5125.6314	0
20	8750.	0
25	3624.3686	0

CST

1

32

1	1	1	6	2
2	1	6	7	2
3	1	2	7	3
4	1	7	8	3
5	1	3	8	4
6	1	8	9	4
7	1	4	9	5
8	1	9	10	5
9	1	6	11	7
10	1	11	12	7
11	1	7	12	8
12	1	12	13	8
13	1	8	13	9
14	1	13	14	9
15	1	9	14	10
16	1	14	15	10
17	1	11	16	17
18	1	17	12	11

```

19 1 12 17 18
20 1 18 13 12
21 1 13 18 19
22 1 19 14 13
23 1 14 19 20
24 1 20 15 14
25 1 16 21 22
26 1 22 17 16
27 1 17 22 23
28 1 23 18 17
29 1 18 23 24
30 1 24 19 18
31 1 19 24 25
32 1 25 20 19
CSM
1
1 70000. 2.5 0.3 0

```

[ORNEK3.OUT]: SEKIL 4.3.C DEKI MODELIN OUTPUT DOSYASI

Not: Sadece analiz sonuçları verilmiştir.

```

SISTEMIN BAND GENISLIGI.....= 20
MAKSIMUM MATRIS SATIR SAYISI.....=200000
TOPLAM NOKTA SAYISI.....= 25
PROBLEM ICIN GEREKEN SATIR SAYISI....= 50

```

DENKLEMLER HESAPLANIYOR

HESAPLANAN NOKTA DEFORMASYONLARI:

```

=====
NOKTA    DX-HAREKETI    DY-HAREKETI    QZ-HAREKETI
=====
1      0.00000E+00   -6.72921E-03
2      0.00000E+00   -1.05092E-02
3      0.00000E+00   -1.48994E-02
4      0.00000E+00   -2.17816E-02
5      0.00000E+00   -3.30779E-02
6      1.09331E-02   -7.65500E-03
7      1.01572E-02   -8.90134E-03
8      1.55490E-02   -1.28419E-02
9      2.47569E-02   -1.94295E-02
10     4.08791E-02   -3.12238E-02
11     2.01637E-02   -5.41604E-03
12     2.03015E-02   -4.87188E-03
13     3.02068E-02   -8.30810E-03
14     4.68598E-02   -1.36318E-02
15     1.00048E-01   -2.82302E-02
16     2.85014E-02   -2.65095E-03
17     2.96595E-02   -1.58572E-03
18     4.15624E-02   -3.61505E-03
19     6.28577E-02   -6.67777E-03
20     1.03448E-01   -1.06290E-02
21     3.06750E-02   0.00000E+00
22     3.36619E-02   0.00000E+00
23     4.60975E-02   0.00000E+00
24     6.87702E-02   0.00000E+00

```

25 1.05491E-01 0.00000E+00

DUZLEM GERILME ELEMANLARININ GERILMELERI :

ELEMAN	GERILMEX	GERILMEY	GERILMEXY
1	1.641813E+02	1.397467E+01	-7.909645E+00
2	8.704082E+01	8.852258E+00	-1.212295E+01
3	9.629526E+01	1.132776E+01	4.312368E+00
4	7.525382E+01	2.973336E+00	-5.079244E-01
5	7.699359E+01	3.827866E+00	2.385831E+00
6	7.224752E+01	5.944757E-01	2.866825E-01
7	7.267058E+01	7.148115E-01	1.034417E+00
8	6.904724E+01	-1.210061E-01	4.709192E-01
9	1.252444E+02	1.517356E+01	-1.313465E+01
10	6.572198E+01	-2.036938E+00	-1.368399E+01
11	9.856452E+01	2.103757E+00	3.037762E+00
12	7.122372E+01	-5.922893E+00	-3.506126E+00
13	8.069263E+01	1.074481E-01	1.722714E+00
14	7.116939E+01	-3.284551E+00	-1.022099E+00
15	7.384862E+01	3.589906E-01	6.207274E-01
16	7.048199E+01	-7.441414E-01	-1.582788E-01
17	5.091095E+01	-1.647787E+01	-3.180235E+01
18	6.164527E+01	1.184054E-01	-1.316670E+01
19	6.967754E+01	-1.146206E+01	-1.826262E+01
20	7.204893E+01	-2.358216E+00	-4.688018E+00
21	7.026854E+01	-4.926534E+00	-6.118474E+00
22	7.229316E+01	-1.147248E+00	-1.900081E+00
23	7.023343E+01	-1.158529E+00	-2.079353E+00
24	7.084625E+01	2.208997E-01	-5.161688E-01
25	1.784627E+01	-3.343880E+01	-1.010097E+01
26	2.350670E+01	-4.369274E+00	-6.222109E+00
27	4.988066E+01	4.613283E-01	-1.027378E+01
28	5.572019E+01	-1.189896E+00	-4.744737E+00
29	6.394895E+01	1.551089E+00	-3.651480E+00
30	6.628619E+01	1.239088E-01	-2.008751E+00
31	6.888141E+01	1.120587E+00	-1.411339E+00
32	6.953831E+01	2.899079E+00	-9.832533E-01

EK – 3A

[ORNEK3A]: SEKIL 4.3.H DAKI MODELE AIT DATA ve OUTPUT DOSYALARI

NOT1: Çok fazla yer kaplamaları nedeniyle; Şekil 4.3.h'daki modele ait data ve output dosyaları, diğer örneklere ait data ve output dosyalarının da bulunduğu, ekteki CD içerisinde verilmiştir.

EK – 4

[ORNEK4]: SEKIL 4.4.C DEKI MODELE AIT DATA ve OUTPUT DOSYALARI

NOT1: Çok fazla yer kaplamaları nedeniyle; Şekil 4.4.c'deki modele ait data ve output dosyaları, diğer örneklere ait data ve output dosyalarının da bulunduğu, ekteki CD içerisinde verilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice GAZİ, 1979 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini Nuripaşa İlkokulu ve Mensucat Santral Lisesi (Orta Bölümü)'nde, orta öğrenimini ise Şehremini (Y.D.A.) Lisesi'nde tamamladı. 1997 yılında İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde başladığı lisans öğrenimini 2001 yılında tamamladı. 2002 – 2005 yılları arasındaki özel bir mühendislik bürosundaki mesleki deneyimin ardından 2005 yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Mühendislik Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı ve halen bu görevine devam etmektedir.